

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING MATHEMATISCHE BESLISSKUNDE

BC 10/73

DECEMBER

P.J. WEEDA
SIMULATIE

Syllabus bij de Leergang Mathematische Besliskunde

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

I n h o u d

1. Inleiding	1
2. Enige uitgewerkte voorbeelden	3
3. Aselekte getallen	19
4. Trekkingen uit verdelingen	24
4.1 Discrete verdelingen	24
4.2 Continue verdelingen	31
5. Enige algemene aspecten van simulatie	37
5.1 Welke toegelaten oplossingen moeten worden doorgerekend	37
5.2 De keuze van de begintoestand	38
5.3 Het aantal series	41
6. Vraagstukken	45

1. Inleiding

Beslissingsproblemen bezitten als kenmerk dat naast de grootheden, waarvan de waarde of de kansverdeling vastligt (of als vast wordt aangenomen), een aantal grootheden zijn aan te wijzen waarvan de waarden binnen zekere grenzen vrij gekozen kunnen worden. Deze variabelen noemt men wel beslissingsvariabelen. De waarden, die deze beslissingsvariabelen kunnen aannemen worden meestal beperkt door economische en technische restricties, opgelegd aan het systeem i.e. het deel van de werkelijkheid dat wordt beschouwd.

Indien het probleem in zijn geheel op bevredigende wijze in een wiskundig model kan worden gegoten en er tevens een oplosmethode bestaat om de optimale waarden van deze beslissingsvariabelen ten opzichte van een van te voren vastgesteld criterium snel te berekenen, dan zal men deze weg bewandelen.

Een voorbeeld van een veelvuldig gebruikt wiskundig model is lineaire programmering, waarbij de simplexmethode deze optimale oplossing levert.

Kenmerkend voor de reeds in vergaande staat van ontwikkeling verkerende oplosmethoden is dat ze een optimale oplossing bereiken zonder dat alle oplossingen, welke door de bijvoorwaarden worden toegelaten, behoeven te worden nagegaan.

Bij vele praktische beslissingsproblemen is het onmogelijk het probleem in zijn geheel in een wiskundig model te gieten zonder de werkelijkheid te veel geweld aan te doen. In andere gevallen is de criteriumfunctie misschien wel expliciet op te schrijven maar onhanteerbaar vanuit reken-technisch oogpunt. Indien echter zowel het individuele gedrag van de onderdelen van het systeem als de onderlinge betrekkingen tussen deze onderdelen wiskundig vast te leggen zijn, dan kan de waarde van de criteriumfunctie voor iedere vaste toegelaten keuze van de beslissingsvariabelen worden berekend. De procedure, die dan noodgedwongen gevolgd moet worden, is de waarde van de criteriumfunctie te berekenen voor alle toegelaten oplossingen van de beslissingsvariabelen en hieruit de gunstigste te kiezen. In de besliskunde wordt deze werkwijze simulatie genoemd.

De letterlijke betekenis van simulatie is nabootsen.

Hier geschiedt dit nabootsen door middel van een gedachtenexperiment dat met potlood en papier kan worden uitgevoerd. Ook in andere takken van techniek en wetenschap is simulatie als methode bekend. Het experimenteren geschiedt dan meestal met behulp van een fysisch model op kleine schaal (b.v. proeffabriek, windtunnel, enz.). Men maakt gewoonlijk van simulatie gebruik als het experimenteren met het echte systeem onmogelijk of te kostbaar is. Het belangrijkste verschil tussen simulatie in de besliskunde en simulatie in andere wetenschappen is dat een oplossing wordt gezocht, die zo goed mogelijk aan een van te voren vastgesteld criterium voldoet.

Bovenstaande procedure leidt niet in een eindige tijd tot het optimum, als het aantal toegelaten oplossingen onbegrensd is. Men is dan gedwongen zich te beperken tot het doorrekenen van een eindig aantal representatief te achten toegelaten oplossingen en bepaalt daaruit de gunstigste. Men heeft dan meestal geen optimale, maar wel een zeer goede oplossing gevonden, indien de uitsluiting van de overige oplossingen op verantwoorde wijze is geschied.

Een andere complicatie treedt op als sommige onderdelen van het systeem een stochastisch gedrag vertonen. Vaak is het mogelijk de kansverdeling van dit gedrag vast te stellen. Men vervangt dan ieder stochastisch onderdeel door een van zijn mogelijke waarden door een trekking te doen uit zijn kansverdeling. Vervolgens berekent men de bijbehorende waarde van de criteriumfunctie onder een vaste keuze van de beslissingsvariabelen. Herhaalt men deze procedure met andere trekkingen, dan verkrijgt men bij dezelfde vaste keuze van de beslissingsvariabelen een andere uitkomst van de criteriumfunctie. Het gemiddelde van deze uitkomsten geeft dan een schatting van de verwachte waarde van de criteriumfunctie. Deze werkwijze wordt de Monte Carlo methode genoemd. Men herhaalt vervolgens deze procedure voor de overige toegelaten oplossingen. Ook indien er slechts een eindig aantal toegelaten oplossingen zijn is het gezien de stochastische uitkomsten onmogelijk met zekerheid de optimale hiervan aan te wijzen. Over de optimaliteit van een oplossing kunnen alleen statistische uitspraken worden gedaan.

2. Enige uitgewerkte voorbeelden

Voorbeeld 2.1 (deterministische versie)

Een fotograaf heeft aan vier opdrachtgevers beloofd dat de foto's woensdag klaar zouden zijn. Als hij woensdagavond naar huis gaat is hij echter met alle vier opdrachten niet verder dan dat hij de negatieven op zijn werktafel heeft liggen. Alle cliënten hebben evenveel haast. Omdat zij alle vier nogal ver weg wonen besluit hij op donderdag eerst alle opdrachten te voltooien en ze dan samen weg te brengen.

De vraag is nu, in welke volgorde onze fotograaf en zijn twee assistenten de vier opdrachten A, B, C en D moeten behandelen. Hierbij is gegeven, dat de eerste assistent alleen kan ontwikkelen en de tweede alleen afwerken. Afdrukken gebeurt alleen door de fotograaf zelf. Het afdrukken van een opdracht kan pas beginnen als het ontwikkelen voor die opdracht voltooid is en evenzo begint de afwerking van een opdracht pas na het afdrukken. Het materiaal moet in dezelfde volgorde elk der drie behandelingen ondergaan. Dus als B eerder ontwikkeld is dan A wordt B ook eerder afgedrukt, etc. De benodigde tijden voor de diverse onderdelen zijn de fotograaf uit ervaring bekend en worden gegeven in tabel 1.

Tabel 1 Benodigde tijden per behandeling en per opdracht

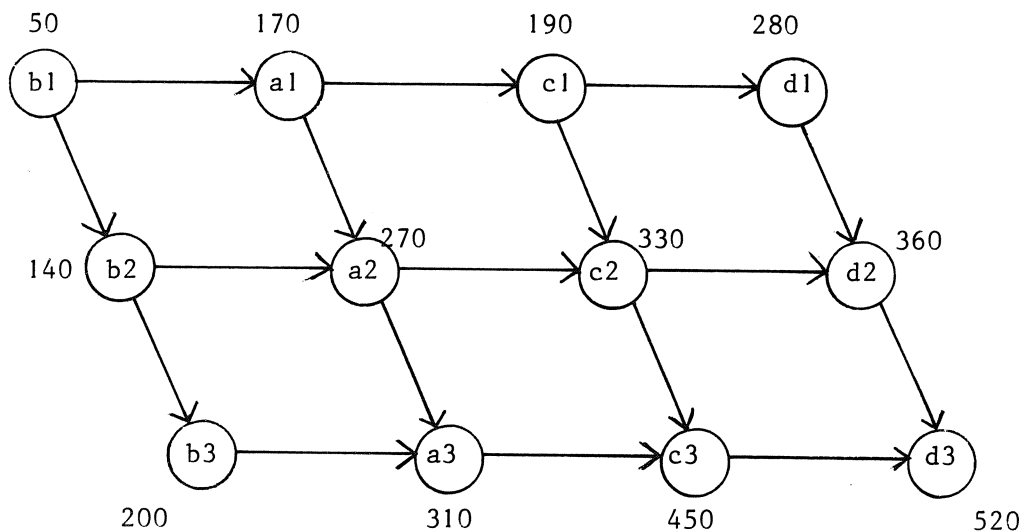
opdracht	ontwikkelen	afdrukken	afwerken
A	120	100	40
B	50	90	60
C	20	60	120
D	90 ^{*/}	30	70

Oplossing

Dit voorbeeld is, zoals uit de formulering volgt, een deterministisch probleem. De toegelaten oplossingen zijn de verschillende manieren, waarop de vier opdrachten gerangschikt kunnen worden. Dit zijn er $4! = 24$. Onze fotograaf vraagt zich af nu op woensdagavond af, bij welke van deze 24 toegelaten oplossingen de totaal benodigde tijd minimaal is.

^{*/} Echter 70 wanneer D als eerste behandeld wordt. Dit materiaal is nl. al opgespannen in de ontwikkeltrammel.

Het zou natuurlijk onverstandig zijn de volgorde BACD te kiezen wanneer BCAD tot een kortere werktijd leidt. Bij een vaste keuze van volgorde is het berekenen van de totale werktijd een netwerkprobleem geworden. In het volgende stellen we iedere handeling voor door een letter met een index. Voor opdracht A worden de handelingen ontwikkelen, afdrucken en afwerken weergegeven door a_1 , a_2 en a_3 respectievelijk, voor opdracht B door b_1 , b_2 en b_3 , enz. In figuur 1 is het netwerk voor de volgorde BACD getekend. In de figuur geven de pijlen de volgorde-
relatie aan en de punten de handelingen. Tevens zijn de tijdstippen aangegeven waarop iedere handeling op z'n vroegst gereed kan zijn.



Figuur 1

Het netwerk voor volgorde BACD

Indien nu voor iedere ordening deze berekening wordt uitgevoerd dan verkrijgt men de resultaten weergegeven in tabel 2.

Tabel 2 Benodigde totale tijd voor de volledige behandeling van de vier opdrachten

volgorde	tijd	volgorde	tijd	volgorde	tijd	volgorde	tijd
ABCD	560	BACD	520	CABD	430	DABC	560
ACBD	530	BCAD	430	CBAD	400	DBAC	520
ACDB	530	BCDA	430	CBDA	420	DBCA	430
ABCE	510	BDCA	430	CDBA	420	DCBA	400
ADBC	530	BDAC	540	CDAB	480	DCAB	460
ABDC	560	BADC	500	CADB	430	DACE	530

Uit deze tabel blijkt dat CBAD en DCBA de kortste werktijd van 400 leveren.

Voorbeeld 2.1 (stochastische versie)

Laten in voorbeeld 2.1 de tijdsduren van het ontwikkelen nog steeds gegeven zijn volgens tabel 1. De overige tijdsduren zijn onafhankelijk en normaal verdeeld. Zowel hun verwachting als hun variantie zijn gelijk aan de in tabel 1 gegeven waarde. De fotograaf weet dat bij konstante tijdsduren de ordeningen CBAD en DCBA tot de minimale duur van 400 minuten hebben geleid (zie tabel 2). Hij vraagt zich af welke van deze twee onder de nieuwe gegevens de voorkeur verdient.

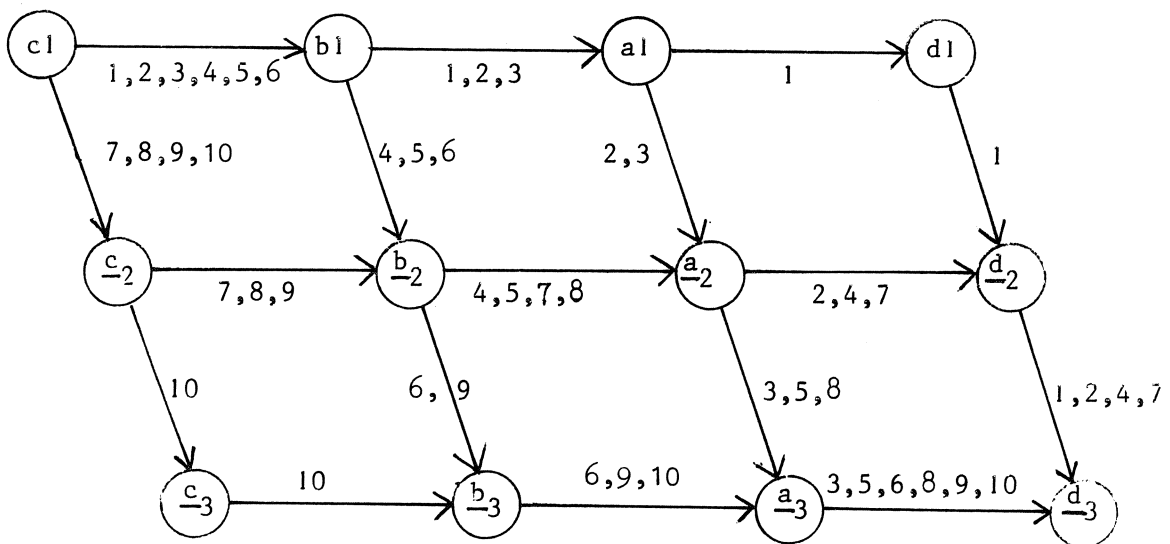
Oplossing

Het probleem is nu stochastisch geworden. Van de twee toegelaten oplossingen CBAD en DCBA wordt nu nagegaan welke de voorkeur verdient op grond van de verwachte tijdsduur. De duur van de handelingen a_2 , a_3 , b_2 , b_3 , c_2 , c_3 , d_2 en d_3 zijn nu stochastisch en worden daarom onderstreept. Er moeten trekkingen worden gedaan uit de verdelingen van $\underline{a_2}$, $\underline{a_3}$, $\underline{b_2}$, $\underline{b_3}$, $\underline{c_2}$, $\underline{c_3}$, $\underline{d_2}$ en $\underline{d_3}$. Hoe deze trekkingen worden verkregen is het onderwerp van paragraaf 4.

Voor het verkrijgen van een schatting van de verwachte tijdsduur van CBAD kan als volgt te werk worden gegaan:

1. Doe een trekking uit ieder van de acht verdelingen.
2. Bepaal met netwerkplanning het vroegste tijdstip waarop alle handelingen van die volgorde kunnen zijn verricht.
3. Herhaal stap 1 en 2 N keer en bepaal het gemiddelde van deze N uitkomsten.

Figuur 2 Het netwerk voor volgorde CBAD



Men kan het vroegst mogelijke tijdstip van beëindiging van CBAD ook verkrijgen door het maximum te bepalen van alle mogelijke paden met c_1 als eerste en d_3 als laatste handeling. Er zijn totaal de 10 volgende paden

$$\begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8) \\
 (9) \\
 (10)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 c_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc}
 b_1 & \rightarrow & a_1 & \rightarrow & d_1 & \rightarrow & \underline{d}_2 \\
 b_1 & \rightarrow & a_1 & \rightarrow & \underline{a}_2 & \rightarrow & \underline{d}_2 \\
 b_1 & \rightarrow & a_1 & \rightarrow & \underline{a}_2 & \rightarrow & \underline{a}_3 \\
 b_1 & \rightarrow & \underline{b}_2 & \rightarrow & \underline{a}_2 & \rightarrow & \underline{d}_2 \\
 b_1 & \rightarrow & \underline{b}_2 & \rightarrow & \underline{a}_2 & \rightarrow & \underline{a}_3 \\
 b_1 & \rightarrow & \underline{b}_2 & \rightarrow & \underline{b}_3 & \rightarrow & \underline{a}_3 \\
 \underline{c}_2 & \rightarrow & \underline{b}_2 & \rightarrow & \underline{a}_2 & \rightarrow & \underline{d}_2 \\
 \underline{c}_2 & \rightarrow & \underline{b}_2 & \rightarrow & \underline{a}_2 & \rightarrow & \underline{a}_3 \\
 \underline{c}_2 & \rightarrow & \underline{b}_2 & \rightarrow & \underline{b}_3 & \rightarrow & \underline{a}_3 \\
 \underline{c}_2 & \rightarrow & \underline{c}_3 & \rightarrow & \underline{b}_3 & \rightarrow & \underline{a}_3
 \end{array} \right] \rightarrow \underline{d}_3
 \end{array}$$

Deze paden zijn ook in figuur 2 aangegeven.

Indien men het probleem anders dan met simulatie zou willen oplossen dan kan men voor ieder van deze paden apart gemakkelijk de verdeling, verwachting en variantie van de tijdsduur bepalen. Deze totale tijdsduur is weer normaal verdeeld, de verwachting is gelijk aan de som van de verwachtingen en de variantie gelijk aan de som van de varianties van de samenstellende delen. Deze tijdsduren zijn echter wel afhankelijk en volgens het criterium moeten we de verwachting van het maximum van deze afhankelijke stochastische variabelen bepalen. Om deze verwachting expliciet op te schrijven is geen eenvoudige zaak. Daarnaast is de verkregen uitdrukking moeilijk hanteerbaar vanuit rekentechnisch standpunt. Om deze redenen verdient simulatie hier de voorkeur.

Op de Electrologica X8 van het Mathematisch Centrum zijn van beide volgorden CBAD en DCBA twee series van 500 bepalingen van de tijdsduur gedaan. De resultaten vindt men in tabel 3. Naast het gemiddelde zijn ook de mediaan en het 90-percentiel van deze series opgenomen.

Tabel 3 Resultaat van 2 series van 500 bepalingen van de totale tijdsduur t voor de volgorde CBAD en de volgorde DCBA

	volgorde CBAD		volgorde DCBA	
	1e serie	2e serie	1e serie	2e serie
$360 \leq t < 379$	22	42	4	8
$380 \leq t < 399$	205	211	161	181
$400 \leq t < 419$	235	207	287	255
$420 \leq t < 439$	38	40	45	51
$440 \leq t < 459$	0	0	3	5
$460 \leq t < 479$	0	0	0	0
Totaal	500	500	500	500
Gemiddelde	401,4	399,9	405,1	404,6
Mediaan	401	399	404	403
90-percentiel	417	418	419	420

Natuurlijk is de uitkomst van een Monte Carlo experiment altijd enigszins afhankelijk van de gebruikte aselekte getallen. Men ziet echter dat de twee series van 500 waarnemingen toch in sterke mate overeenstemmen. Bij constante tijdsuren was $t = 400$ zowel voor CBAD als voor DCBA. Men ziet dat de verwachte tijdsduur voor CBAD ongeveer 400 blijft, terwijl die voor DCBA tot ongeveer 405 oploopt. De fotograaf zal daarom aan CBAD de voorkeur geven, ook als hij let op de mediaan of de in 10 procent van de gevallen overschreden waarde van t . Per serie hebben wij dezelfde 8×500 aselekte getallen gebruikt voor beide volgorden. Het nut hiervan wordt in paragraaf 5 toegelicht.

Voorbeeld 2.2.

In een autofabriek zijn ten gerieve van de monteurs werkzaam bij de lopende band en in de werkplaats op verschillende plaatsen gereedschapsbanken ingericht. Deze gereedschapsbanken zijn magazijnen waar de benodigde gereedschappen door de monteurs kunnen worden verkregen. De gereedschapsbanken zijn bemand met een of meer bedienden die met het opzoeken en afleveren van het gevraagde gereedschap zijn belast.

Op de directie van het bedrijf werd van twee verschillende kanten druk uitgeoefend in verband met deze gereedschapsbanken. Enerzijds klaagden de ploegbazen van de monteurs dat deze te lang in de rij moesten wachten, terwijl er van de zijde van de bedrijfsleiders gezien de "overhead" op wordt aangedrongen het aantal bedienden per gereedschapsbank zoveel mogelijk te beperken. De directie besloot dit probleem door de O.R.-groep van het bedrijf eens op zijn economische merites te laten onderzoeken.

Uit een statistisch onderzoek bleek dat de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende aankomsten bij goede benadering door een negatief exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 72$ worden weergegeven. De helptijden van de bedienden werden vrij getrouw door een negatief exponentiële verdeling met parameter $\mu = 60$ weergegeven. Als tijdseenheid werd hierbij een uur aangehouden. Bij de boekhouding werden gegevens verkregen

over de kosten per uur van de bedienden en de monteurs. Deze bedroegen respectievelijk $c_1 = 30$ en $c_2 = 70$ per uur. Er werd besloten na te gaan voor welk aantal bedienden per gereedschapsbank de gemiddelde kosten per uur minimaal zijn.

Voordat de oplossing van dat probleem met behulp van simulatie wordt behandeld moet worden opgemerkt dat dit probleem een **expliciete** oplossing bezit indien het systeem zich in de z.g. stationaire toestand bevindt. Onder de stationaire toestand wordt verstaan

dat de kansverdeling van de toestand van het systeem (hier: het aantal monteurs in het systeem) niet meer afhangt van de tijd. Deze stationaire toestand wordt strikt genomen pas na het verloop van een oneindig lange tijd bereikt en alleen als er aan twee voorwaarden is voldaan. De eerste voorwaarde is dat zowel de verdeling van de aankomsten als de verdeling van de helptijden onafhankelijk van de tijd zijn. De tweede voorwaarde is dat de bedienden "gemiddeld" het hun opgedragen werk moeten aankunnen. De wiskundige vorm van deze tweede voorwaarde komt ter sprake bij de behandeling van de stationaire versie van dit probleem in paragraaf 5. In de huidige formulering van dit voorbeeld gaat de interesse eigenlijk niet uit naar de stationaire toestand, maar naar de ontwikkeling van het systeem gedurende een eindige tijdsperiode en wel een werkdag. De toestand van het systeem aan het begin van iedere werkdag ligt precies vast; het aantal monteurs in het systeem bedraagt nul. Voor deze niet-stationaire situatie levert de wachttijd theorie geen hanteerbare expliciete oplossing.

Deze is er overigens ook niet in het stationaire geval indien de helptijd een andere verdeling dan de negatief exponentiële volgt. Om deze redenen is de oplossing van dit voorbeeld door simulatie van belang.

We behandelen eerst de oplossing voor willekeurige verdelingen van de aankomstintervallen en de helptijden. Daarna wordt het speciale geval besproken, waarin beide verdelingen negatief exponentiël zijn.

Oplossing voor willekeurige verdelingen

De volgende notatie wordt ingevoerd.

- T: aantal werkuren per dag
- n: aantal monteurs in het systeem
- m: aantal bedienden (beslissingsvariabele)
- t: gesimuleerde tijd
- W: totale tijd doorgebracht in het systeem door alle monteurs die in het systeem zijn of geweest zijn.

De gemiddelde kosten per uur van het systeem over een tijdsperiode ter lengte t worden gegeven door

$$c_1 m + c_2 W / t \quad (2.1)$$

De grootheid W moet voor iedere m per werkdag door de simulatie worden bepaald.

Voor de opzet van de simulatie is het van belang welke systeemgrootheden moeten worden bijgehouden en wanneer dit bijhouden moet geschieden. De belangrijkste grootheden die in een simulatie onderkend moeten worden zijn de toestandsvariabelen. Zij bepalen de ontwikkeling van het systeem in de tijd. Het systeem is altijd in een bepaalde toestand en deze toestand van het systeem is vastgelegd als alle toestandsvariabelen een waarde hebben. Welke grootheden zijn nu de toestandsvariabelen in een simulatie? Hiervoor geldt als criterium dat bij een juiste definitie van de toestandsvariabelen geldt dat op ieder willekeurig tijdstip bij gegeven toestand de toekomstige ontwikkeling van het systeem onafhankelijk is van het verleden.

We gaan nu na welke van bovenstaande grootheden toestandsvariabelen zijn. Van deze grootheden hebben m en T een vaste waarde en komen daarom niet in aanmerking als toestandsvariabele. De toekomstige ontwikkeling van het systeem is verder onafhankelijk van de waarde van W . Deze wordt alleen bijgehouden om de waarde van de criteriumfunctie te bepalen. Ook W is dus geen toestandsvariabele. Alleen n is een toestandsvariabele en desnoods t . De laatste is nodig om te bepalen of de werkdag

om is. We zullen straks zien dat n en t niet de enige toestandsvariabelen zijn.

Teneinde de vraag te beantwoorden wanneer de systeemgrootheden moeten worden bijgehouden wordt opgemerkt dat dit in principe op twee manieren kan geschieden en wel

a. Op tijdstippen die tijdens de simulatie worden bepaald

b. Op van te voren vastgestelde tijdstippen.

De methode a verdient de voorkeur als de toestand van het systeem slechts op discrete tijdstippen verandert. Het systeem wordt dan alleen op deze tijdstippen bijgehouden. Methode b wordt meestal gebruikt als de toestand van het systeem op continue wijze verandert. Zoals we zullen zien verandert de toestand in dit probleem slechts bij aankomst en vertrek van een monteur. Daarom is de eerste methode gevolgd.

Hoe worden nu de aankomst- en vertrektijdstippen voortgebracht? Het eerstvolgende aankomsttijdstip wordt bepaald door op ieder aankomsttijdstip een trekking te doen uit de verdeling van de aankomstintervallen en het getrokken aankomstinterval bij het huidige tijdstip op te tellen. Het eerstvolgende vertrektijdstip wordt bepaald als een monteur uit het systeem vertrekt. Ter bepaling van dit tijdstip is het noodzakelijk voor ieder der m bedienden bij te houden wanneer deze vrijkomen. We vullen in dit stadium eerst de notatie aan met

a : eerstvolgende aankomsttijdstip
 v : " vertrektijdstip
 $v(j)$: tijdstip waarop bediende j vrijkomt $j = 1, \dots, m$

Voor het eerstvolgende vertrektijdstip volgt nu

$$v = \min_{j = 1, \dots, m} v(j) \quad (2.2)$$

De waarde van j waarvoor dit minimum wordt bereikt geven we aan met i . Het tijdstip waarop de volgende toestandsverandering plaatsvindt volgt uit

$$t = \min (v, a, T) \quad (2.3)$$

Indien er bij het vrijkomen van de j^e bediende een monteur staat te wachten, dan wordt het tijdstip $v(j)$, waarop deze bediende opnieuw vrijkomt, berekend door een trekking te doen uit de helptijdverdeling en deze bij de oude waarde van $v(j)$ op te tellen. Indien er op het tijdstip van vrijkomen geen monteur staat te wachten dan kan $v(j)$ zonder bezwaar op T gesteld worden. Dit tijdstip blijft T totdat er een aankomst plaatsvindt. Volgens (2.2) is $v = T$ als er geen monteur in het systeem is. Het eerstvolgende tijdstip volgend uit (2.3) is dan altijd een aankomst tenzij $a > T$. In het laatste geval stopt de simulatie evenals in het geval dat v en a beide $> T$ zijn.

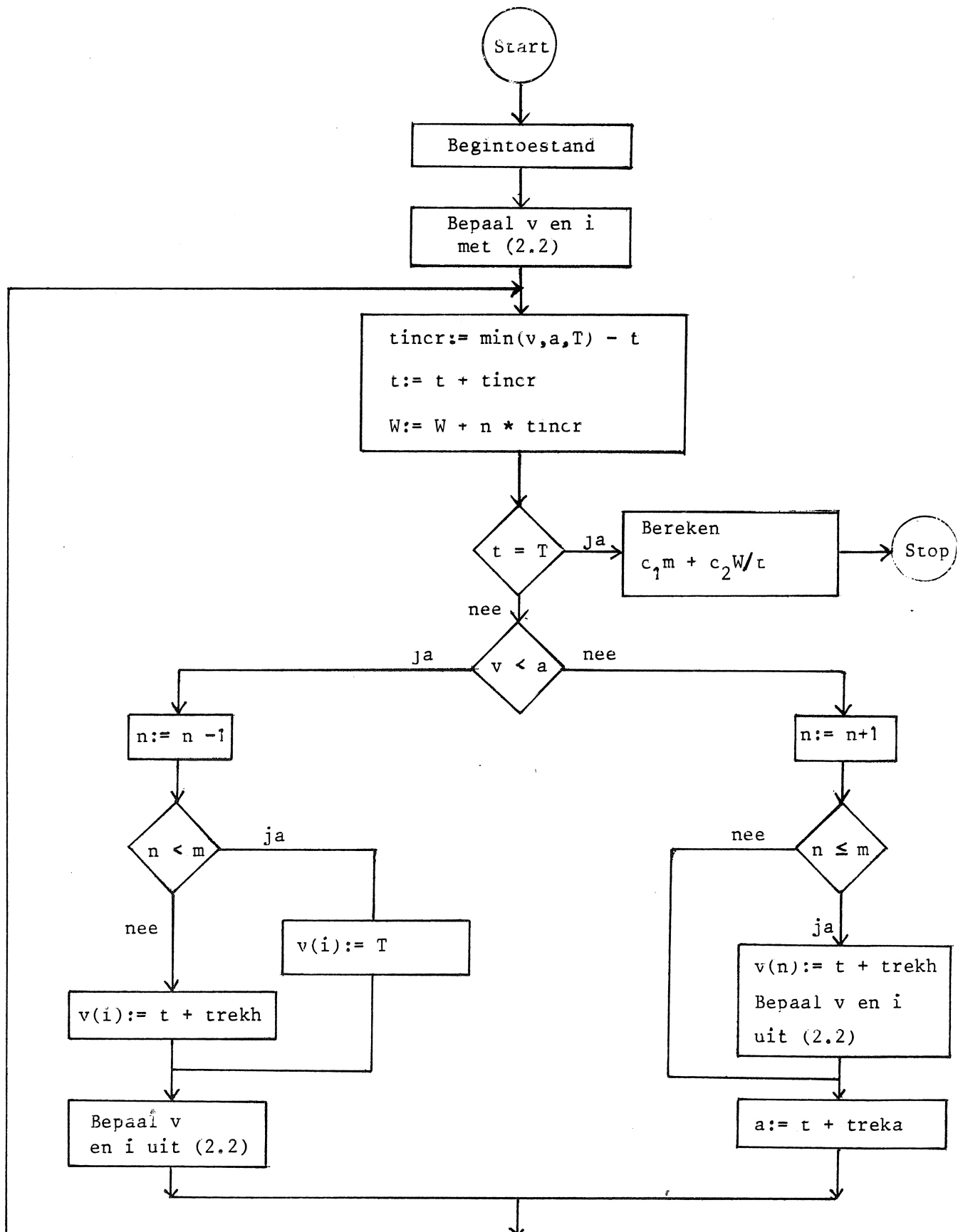
Na het verkrijgen van de tijdstippen keren we terug tot de toestandsvariabelen. In dit systeem zijn de toestandsvariabelen n , a , $v(j)$, $j = 1, \dots, m$ en t . Zij veranderen bij een aankomst of een vertrek. Bij een aankomst wordt n met 1 opgehoogd, t krijgt als waarde a en a wordt opnieuw bepaald. De $v(j)$ blijven onveranderd als de n (na ophoging) $> m$. Indien n (na ophoging) $\leq m$ dan wordt er een helptijd getrokken en $v(n)$ opnieuw bepaald.

Bij een vertrek wordt n met 1 verlaagd, t krijgt de waarde v en a blijft onveranderd. Indien het de i^e bediende is die vrijkomt wordt $v(i)$ opnieuw bepaald terwijl de $v(j)$ voor $j \neq i$ onveranderd blijven. Van de overige grootheden v , i en W wordt W bijgewerkt op elk tijdstip. v en i worden alleen opnieuw bepaald als een der $v(j)$ van waarde veranderd is.

In het blokschema van figuur 3 is nog de volgende notatie gebruikt:

- t_{incr} : tijdsinterval tussen twee opeenvolgende toestandsveranderingen
- $treka$: trekking uit de aankomstintervalverdeling
- $trekh$: trekking uit de helptijdverdeling.

Figuur 3 Blokschema voor willekeurige verdelingen



In het blokschema van figuur 3 is de begintoestand van het systeem nog niet gespecificeerd. Alle toestandsvariabelen, n , t , a en de $v(j)$ moeten een waarde krijgen. Daar het systeem 's morgens zonder monteur begint, kiezen we $n = 0$. Het gevolg hiervan is dat alle $v(j)$ gelijk aan T moeten worden gekozen. Alleen a wordt door een trekking uit de aankomstintervalverdeling bepaald. Verder wordt $t = 0$ gekozen. Ook W krijgt nul als beginwaarde.

Speciale oplossing voor het exponentiële geval

De geschetste procedure voor willekeurige verdelingen van de aankomstintervallen en de helptijden kan nog vereenvoudigd worden als beide verdelingen negatief exponentiële zijn. Daartoe wordt gebruik gemaakt van 3 speciale eigenschappen van deze laatste verdeling.

Eigenschap 1 : De negatief exponentiële verdeling is geheugenloos. Dit wil het volgende zeggen. Stel dat $\underline{x}$ negatief exponentiële verdeeld is met verdelingsfunctie $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ en dat op tijdstip $t = 0$ een gebeurtenis heeft plaatsgevonden. De volgende gebeurtenis vindt dan plaats op het stochastische tijdstip $\underline{x}$. Veronderstel verder dat tot op tijdstip $t = \tau$ geen gebeurtenis plaatsvindt. Dan heeft het tijdsinterval $\underline{y} = \underline{x} - \tau$ dezelfde verdeling als $\underline{x}$ en is dus onafhankelijk van τ !

Dit kan als volgt worden ingezien. Noem de verdelingsfunctie van $\underline{y}$ onder de voorwaarde $\underline{x} > \tau$, $G(y|\tau)$, dan geldt

$$G(y|\tau) = P\{\underline{y} \leq y \mid \underline{x} > \tau\}.$$

Volgens de definitie van voorwaardelijke kans geldt

$$\begin{aligned} P\{\underline{y} \leq y \mid \underline{x} > \tau\} &= P\{\underline{x} - \tau \leq y \mid \underline{x} > \tau\} = \\ &= \frac{P\{\tau < \underline{x} \leq y + \tau\}}{P\{\underline{x} > \tau\}} = \frac{(1 - e^{-\alpha(y+\tau)}) - (1 - e^{-\alpha\tau})}{e^{-\alpha\tau}} = \\ &= \frac{e^{-\alpha\tau} (1 - e^{-\alpha y})}{e^{-\alpha\tau}} = 1 - e^{-\alpha y}. \end{aligned}$$

Eigenschap 2 : Het minimum van k onderling onafhankelijke negatief exponentieel verdeelde stochastische grootheden $\underline{x}_i$ met parameters α_i , $i = 1, \dots, k$ is negatief exponentieel verdeeld met parameter

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i.$$

We tonen dit als volgt aan. Stel $\underline{x} = \min(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k)$ dan geldt:

$$\begin{aligned} P\{\underline{x} > x\} &= P\{\underline{x}_1 > x, \underline{x}_2 > x, \dots, \underline{x}_k > x\} = \\ &= P\{\underline{x}_1 > x\} \cdot P\{\underline{x}_2 > x\} \dots P\{\underline{x}_k > x\} = \\ &= e^{-\alpha_1 x} \cdot e^{-\alpha_2 x} \dots e^{-\alpha_k x} \\ &= e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

en dus

$$P\{\underline{x} \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Eigenschap 3 : Indien twee onderling onafhankelijke soorten gebeurtenissen plaatsvinden ieder met een tusseninterval dat negatief exponentieel verdeeld is maar met verschillende parameters α_1 en α_2 dan is de kans, dat de eerstvolgende gebeurtenis van soort 1, respectievelijk van soort 2 is, gelijk aan $\alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2)$, $\alpha_2 / (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Stel dat $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ tussenintervallen van soort 1 respectievelijk soort 2 zijn. $\underline{x}_1$ heeft verdelingsfunctie $F_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x}$ en $\underline{x}_2$ $F_2(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x}$. Er geldt

$$\begin{aligned} P\{\underline{x}_2 > \underline{x}_1\} &= \int_0^{\infty} (1 - F_2(x)) \frac{dF_1(x)}{dx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_2 x} \alpha_1 e^{-\alpha_1 x} dx = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Voor de verdere beschrijving van de simulatie wordt de volgende notatie ingevoerd:

exp(α) : trekking uit een negatief exponentiële verdeling met
parameter α
k : aantal bezige bedienden
u : aselekt getal

k is een hulpvariabele die uit a volgt volgens de relatie

$$k = \min(m, n) \quad (2.4)$$

Stel nu dat op een tijdstip t een aankomst of een vertrek plaatsvindt. Dan vinden we het volgende tijdstip door het minimum te bepalen van k + 2 tijdstippen n.l. de tijdstippen waarop de k bezige bedienden vrijkomen, het tijdstip waarop de volgende aankomst plaatsvindt en T. De verdeling van het tijdsinterval tot de volgende aankomst of vertrek is nu negatief exponentieel verdeeld met parameter

$$\alpha = \lambda + k\mu \quad (2.5)$$

zodat het eerstvolgende tijdstip volgt uit

$$t := \min [t + \exp(\lambda + k\mu), T] \quad (2.6)$$

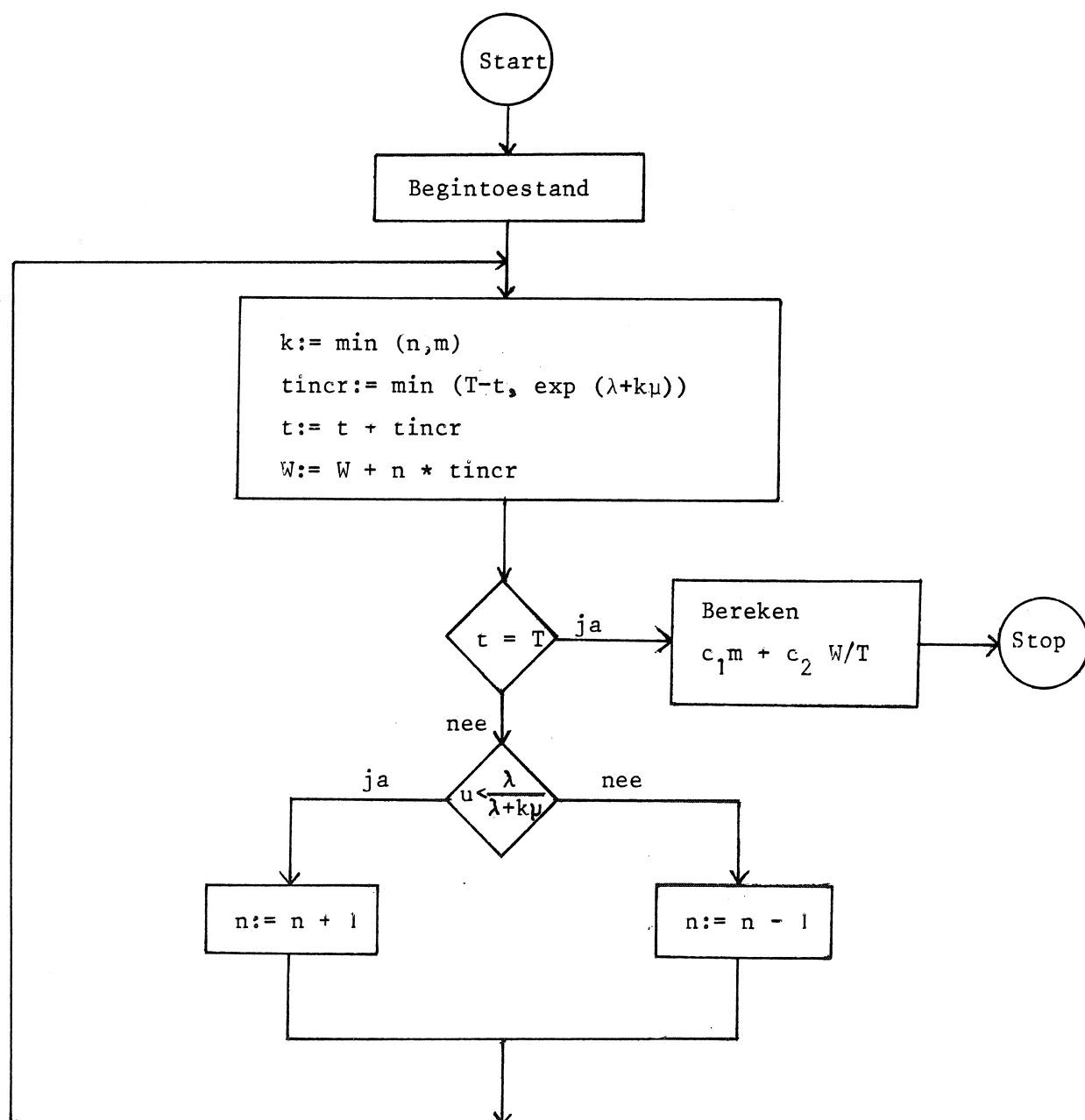
Volgens eigenschap 3 is de kans op een aankomst $\lambda / (\lambda + k\mu)$ en de kans op een vertrek $k\mu / (\lambda + k\mu)$. Aankomst of vertrek wordt uitgemaakt met behulp van een aselekt getal u.

Deze beschouwing gaat ook op als k = n = 0 (geen monteurs in het systeem). Dan geldt $\alpha = \lambda$ volgens (2.5) en de kans op een aankomst is gelijk aan 1 volgens eigenschap 3.

Tot slot merken we nog op dat het aantal toestandsvariabelen nu gereduceerd is tot twee, n.l. n en t. Het blokschema is weergegeven in figuur 4.

Figuur 4

Blok-schema voor het exponentiële geval



De begintoestand is gemakkelijk vast te stellen: n en t zijn dan beide nul. Ook W begint met een waarde nul.

Een nog onaangeroerd probleem is het aantal werkdagen dat moet worden gesimuleerd. Dit probleem hangt ten nauwste samen met de gewenste nauwkeurigheid van de uitkomsten. In paragraaf 5 zal hier nader op worden ingegaan.

Ten slotte geven we de gemiddelde uitkomsten over 15 werkdagen bij $m = 1, \dots, 5$ in tabel 4. Voor deze vijf waarden van m zijn per werkdag dezelfde aselechte getallen gebruikt. Het nut van het gebruik van dezelfde aselechte getallen wordt eveneens in paragraaf 5 toegelicht.

In de kolom daarnaast is het experiment nog eens herhaald met een tweede serie van aselechte getallen. In de meest rechtse kolom zijn ter vergelijking de exacte uitkomsten van de stationnaire toestand opgegeven.

Tabel 4 Gemiddelde kosten voor het exponentiële geval

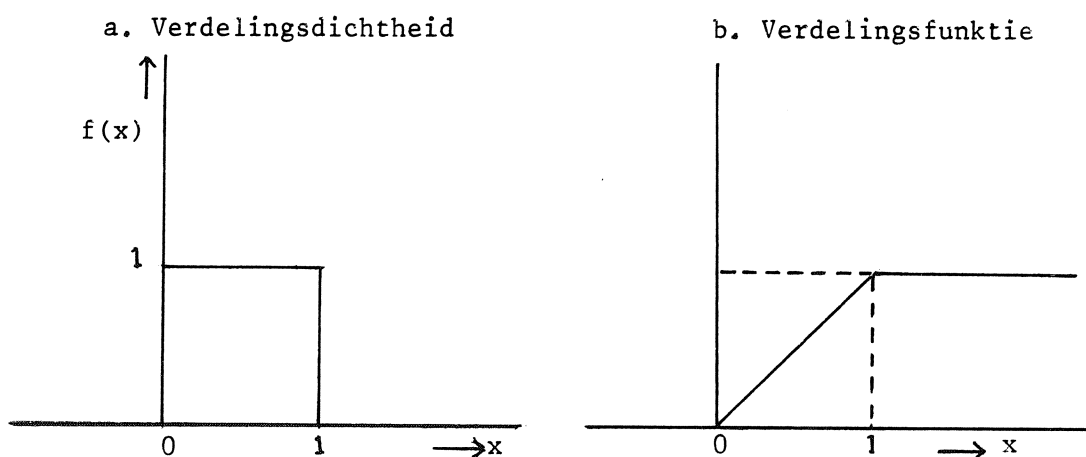
m	1 ^e serie	2 ^e serie	stationair
1	3495,65	3515,84	∞
2	186,83	182,38	191,25
3	178,54	178,18	180,59
4	204,22	203,67	205,11
5	233,44	232,91	234,14

3. Aselekte getallen

In de vorige paragraaf zijn we op het probleem gestuit van het nabootsen van een reeks onafhankelijke waarnemingen uit een gegeven kansverdeling. Het zal in paragraaf 4 blijken dat het van speciaal belang is dit probleem op te lossen voor de homogene verdeling op het interval $(0,1)$. Deze continue verdeling heeft een kansdichtheid $f(x)$ en een verdelingsfunctie $F(x)$ die er zeer eenvoudig uit zien:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{als } x \geq 1 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ x & \text{als } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{als } x \geq 1. \end{cases}$$

Figuur 5 De homogene verdeling op $(0,1)$



Wanneer een proces uitkomsten produceert die aselekte onafhankelijke trekkingen uit bovengenoemde verdeling voorstellen, dan noemt men die uitkomsten aselekte getallen. Schrijft men de aselekte getallen als decimale breuken, dan is voor elke decimaal elk van de cijfers 0, 1, ..., 9 even waarschijnlijk: zij hebben elk een kans $\frac{1}{10}$. Men noemt elke decimaal een aselekt cijfer. Theoretisch zou een aselekt getal nu een oneindig lange decimale breuk worden. Uiteraard is men in de praktijk tevreden met een breuk van bijvoorbeeld drie (of zes) decimalen, waarin elke decimaal elk der getalwaarden 0 t/m 9 aanneemt met

kans $\frac{1}{10}$. In feite vervangt men dan de continue homogene verdeling door een discrete, waarin elk der getallen 0,000; 0,001;....; 0,999 een kans $\frac{1}{1000}$ heeft.

Bij het produceren van dergelijke aselekte getallen van drie cijfers heeft men in het begin gebruik gemaakt van hoge hoeden of vazen, waarin zich duizend papiertjes of schijffjes bevonden, waarop de getallen 0,000 t/m 0,999 waren geschreven. Na goed schudden werd één papiertje getrokken en het opgelezen getal werd genoteerd. Het papiertje werd teruggelegd, er werd opnieuw geschud en getrokken, enz. Uiteraard is dit een omslachtig en tijdrovend proces. Het kan enigszins vereenvoudigd worden door niet éénmaal uit een hoed met duizend briefjes te trekken maar drie maal (met teruglegging) uit een hoed met tien. Elke trekking stelt dan één cijfer voor van het aselekte getal. Men zou verder aselekte trekkingen uit de getallen 0 t/m 36 kunnen produceren met een roulette en uit 1 t/m 6 met een dobbelsteen.

Omstreeks 40 jaar geleden stelde TIPPETT voor tabellen van aselekte cijfers te maken. Hiertoe gebruikte men bijvoorbeeld de laatste vijf cijfers van elke in 20 decimalen getabelleerde logaritmie. Er zijn ook tabellen geconstrueerd door een ronddraaiende schrijf met tien gelijke sektoren op willekeurige tijdstippen stil te zetten en te noteren welke sektor door een vaste wijzer werd aangewezen. Men kan zich in beide gevallen afvragen of de tabel inderdaad aselekte cijfers bevat. KENDALL en BABINGTON-SMITH geven in hun bekende tabel^{*)} een aantal statistische toetsen, bijvoorbeeld op het even vaak voorkomen van elk cijfer of van elk paar opvolgende cijfers, op het aantal cijfers tussen twee nullen, etc. Bij de meeste tabellen van aselekte cijfers is aangegeven of aan de eisen van deze toetsen is voldaan.

Hierbij stuiten wij op een merkwaardige paradox. Wie vijf aselekte cijfers nodig heeft kan de tabel op een willekeurige plaats openslaan en beginnen te lezen. Komt men dan bijvoorbeeld 0 2 3 8 5 tegen dan zal men deze cijfers gebruiken. Zou men echter het vijftal 7 7 7 7 7 ontmoeten dan zou men niet geneigd zijn dit als een groep aselekte cijfers te beschouwen: de kans op vijf maal achtereenvolgend 7 is

*) M.G. KENDALL and B. BABINGTON-SMITH, Tables of random sampling numbers, Tracts for computers 24, Cambridge University Press, 1939.

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 10^{-5}$. Wanneer de tabel echter 100.000 aselekte cijfers bevat, dus 20.000 vijftallen, is de kans dat tenminste één van die vijftallen uitsluitend uit zevens bestaat gelijk aan $1 - (1-10^{-5})^{20000} \approx 0,18$. De kans dat minstens één van de 20.000 vijftallen uit vijfmaal hetzelfde cijfer bestaat is zelfs $1 - (1-10^{-4})^{20000} \approx 0,86$. Algemeen gezegd: wil de tabel als geheel een verzameling aselekte cijfers voorstellen, dan zullen ook zeer speciale combinaties zoals 1 2 3 4 5 of 7 7 7 7 7 hier en daar in de tabel moeten optreden. Is de tabel als geheel aselekt, dan zullen bepaalde kleine onderdelen dat juist niet zijn. Het is dan ook gebruikelijk per groep van duizend cijfers te toetsen of aan de eisen van aselektheid is voldaan. Wanneer een enkel duizendtal niet voldoet, wordt het toch opgenomen in de tabel van aselekte cijfers, maar met een waarschuwende voetnoot. Wie slechts weinige duizendtallen aselekte cijfers wil gebruiken moet deze gedeelten van de tabel overslaan. Het gebruik van minder dan duizend aselekte cijfers komt in de praktijk zelden voor, zodat toetsen voor kleinere gedeelten van de tabel niet gebruikelijk zijn.

Uit Monte Carlo methoden krijgt men natuurlijk steeds enigszins onzekere conclusies. Deze onzekerheid neemt ongeveer met een faktor 10 af door 100 keer zoveel aselekte cijfers te gebruiken. Monte Carlo experimenten op grote schaal zijn dan ook pas in zwang gekomen sinds de ontwikkeling van elektronische rekenautomaten.

Stel dat wij zo'n rekenautomaat 100.000 aselekte cijfers willen laten gebruiken om bijvoorbeeld een wachttijdprobleem te simuleren. Wij zouden dan een ponstypiste de 100.000 cijfers uit de tabel van KENDALL en BABINGTON-SMITH op een ponsband kunnen laten zetten. Uiteraard is dit onzinnig tijdrovend.

Zelfs als de computerbeheerder dit één keer had laten doen ten behoeve van alle toekomstige Monte Carlo gebruikers, resteert nog het probleem van het opbergen van deze 100.000 getallen in het geheugen van de machine. De werkruimte van zelfs een middelgrote computer laat dit niet toe en opbergen in een hulpgeheugen zou leiden tot groot tijdverlies bij het opzoeken.

Men heeft daarom al vroeg gezocht naar mogelijkheden om de machine aselekte getallen zelf te laten produceren. Omdat een rekenautomaat alleen op duidelijke en welgedefinieerde instructies reageert is het principieel onmogelijk om hem strikt willekeurig uit de cijfers 0 t/m 9 te laten kiezen. Er zijn echter methoden om systematisch cijfers te produceren waarbij het systeem zo gecompliceerd is dat het resultaat nauwelijks van een rij aselekte cijfers te onderscheiden is. Men noemt zo'n resultaat een verzameling pseudo-aselekte cijfers.

Een van de oudste voorbeelden van zo'n systeem om pseudo-aselekte cijfers te produceren is de "mid-square technique" van VON NEUMANN. Deze produceert eigenlijk geen aselekte cijfers maar aselekte getallen en wel trekkingen uit de discrete homogene verdeling op 00, 01, ..., 99. Laat y_i het i^e geproduceerde getal zijn, dan wordt y_{i+1} gevormd door de middelste twee cijfers van y_i^2 . De keuze van y_1 is hierbij willekeurig, d.w.z. moet door de programmeur gegeven worden. Twee voorbeelden vindt men in tabel 5.

Tabel 5 Midsquare techniek, twee voorbeelden

i	y_i	y_i^2	i	y_i	y_i^2
1	31	0961	1	79	6241
2	96	9216	2	24	0576
3	21	0441	3	57	3249
4	44	1936	4	24	0576
5	93	8649	5	57	3249
6	64	4098	6	24	0576
7	09	0081			
8	08	0064			
9	06	0036			
10	03	0009			
11	00	0000			

Twee bezwaren van de methode zijn hiermee gedemonstreerd. Zodra het tweede cijfer van y_i^2 een nul is convergeert de rij y_i in hoog tempo naar 0. Zodra een herhaling optreedt is de rij verder periodiek (in de tweede kolom zelfs met periode 2). Hoewel allerlei verfijningen zijn aan te brengen om deze bezwaren weg te nemen is de methode toch nergens meer in gebruik.

Een veel betere methode is de congruentiemethode van LEHMER. Men kiest hierbij een groot geheel getal m en vervolgens gehele getallen y_1 , a en c tussen 0 en $m - 1$ zodanig, dat c en m geen gemeenschappelijke faktor hebben. Verder moet $a-1$ deelbaar zijn door elke priemfaktor van m en door 4, als m een veelvoud van 4 is. Nu zijn y_i/m pseudo aselekte trekkingen uit de homogene verdeling op $(0,1)$, mits men voor y_{i+1} de rest kiest bij deling van $ay_i + c$ door m .

Ter illustratie kiezen wij $m = 16$, $a = 3$, $c = 1$ en $y_1 = 2$ tabel 6, hoewel deze rij niet aan alle eisen voldoet.

Tabel 6 Congruentiemethode, voorbeeld

i	y_i	$ay_i + c$
1	2	$7 = 0,16 + 7$
2	7	$22 = 1,16 + 6$
3	6	$19 = 1,16 + 3$
4	3	$10 = 0,16 + 10$
5	10	$31 = 1,16 + 15$
6	15	$46 = 2,16 + 14$
7	14	$43 = 2,16 + 11$
8	11	$34 = 2,16 + 2$
9	2	$7 = 0,16 + 7$
10	7	

Ook deze keuze leidt dus tot een periodieke rij (periode 8), in strijd met de eis van aselektheid. Iedere rij pseudo-aselekte getallen moet

trouwens wel periodiek zijn, omdat na hoogstens m getallen herhaling gaat optreden. Men heeft echter vastgesteld, dat een geschikte keuze van m leidt tot een rij die wel periodiek is, maar een astronomisch lange periode heeft en ook overigens zeer bruikbaar is.

De keuze $m = 2^{26}$, $a = 26.353.589$, $c = 1$ of $m = 2^{35}$, $a = 2^{18} + 1$, $c = 1$, zijn bijvoorbeeld wel eens gebruikt, met bevredigende resultaten.

Voor een snelle uitvoering van de delingen door m door de rekenmachine is het wenselijk, dat m van de vorm 2^p , $2^p - 1$ of $2^p + 1$ is (p willekeurig). Er zijn allerlei elektrische en elektronisch apparaten geconstrueerd, die op basis van ongeregelde verschijnselen, zoals ionenemissie, aselekte getallen of cijfers produceren. Voor een beschrijving wordt verwezen naar K.D. TOCHER, The art of simulation, The English University Press, London, 1963.

Een goed boek over random getallen met een uitgebreide literatuurlijst tot 1966 is: BIRGER JANSSON, Random number generators, Victor Pettersons Aktiebolog, Stockholm 1966.

4. Trekkingen uit verdelingen

4.1. Discrete verdelingen

a. Alternatieve verdeling

Er zijn trekkingen nodig van de stochastische grootte $\underline{x}$ met discrete verdeling:

$$P\{\underline{x}=0\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\underline{x}=1\} = \frac{1}{2}.$$

De trekkingen zouden verricht kunnen worden door een muntstuk op te werpen: kruis = 0 en munt = 1. Het is niet moeilijk bezwaren tegen deze methode aan te voeren:

- de munt is niet helemaal symmetrisch,
- de opwerptechniek leidt tot niet geheel onderling onafhankelijke gebeurtenissen,
- de munt slijt.

Een veel groter bezwaar is echter dat muntwerpen onpraktisch is, omdat de uitkomsten voor het overgrote deel nodig zullen zijn bij computer-

berekeningen. Daarom is het handiger gebruik te maken van de in de vorige paragraaf besproken pseudo-aselekte getallen (Engels: pseudo-random-numbers). Deze kunnen in een computer snel gegenereerd worden en doorgaan voor trekkingen uit de homogene verdeling. Uit een pseudo-aselekt getal u volgt een trekking x uit de verdeling van $\underline{x}$ met de transformatie:

$$0 < u \leq \frac{1}{2} \longrightarrow x = 0$$

$$\frac{1}{2} < u \leq 1 \longrightarrow x = 1,$$

zodat

$$P\{\underline{x}=0\} = P\{0 < \underline{u} \leq \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{\underline{x}=1\} = P\{\frac{1}{2} < \underline{u} \leq 1\} = \frac{1}{2}.$$

In feite is het voldoende één of meer intervallen op $(0,1]$ te specificeren, met gezamenlijk oppervlak $\frac{1}{2}$. Valt de trekking u in één van deze intervallen, dan geldt $x = 0$; valt u er buiten dan is $x = 1$.

Trekkingen uit de alternatieve verdeling met

$$P\{\underline{x}=1\} = p, \quad P\{\underline{x}=0\} = 1 - p = q$$

worden gerealiseerd met een pseudo-aselekt getal u door te stellen:

$$u \leq q \Longrightarrow x = 0$$

$$u > q \Longrightarrow x = 1.$$

b. Willekeurige discrete verdeling.

$\underline{x}$ is nu een discrete stochastische grootte, die de waarden $x_1, \dots, x_n$ kan aannemen.

$$P\{\underline{x}=x_i\} = p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

We stellen

$$u_i = \sum_{j=1}^i p_j, \quad i = 1, \dots, n$$

$$u_0 = 0.$$

Zij $\underline{u}$ homogeen verdeeld, dan levert de transformatie $u \rightarrow x$:

$$u \in (u_{i-1}, u_i] \Rightarrow x = x_i$$

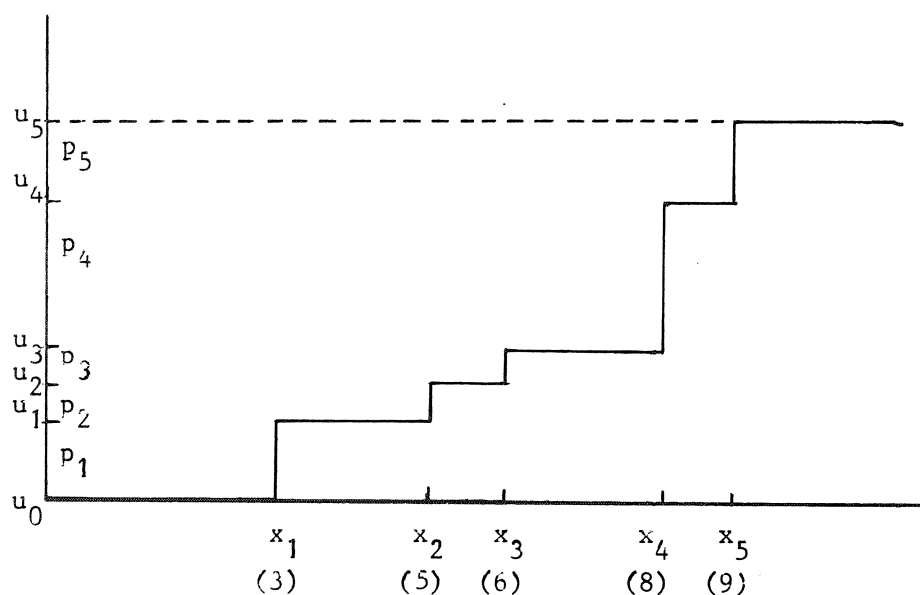
trekkingen van de stochast $\underline{x}$. Immers

$$P\{\underline{x}=x_i\} = P\{\underline{u} \in (u_{i-1}, u_i]\} = p_i.$$

De trekkingen uit de homogene verdeling worden weer uitgevoerd met pseudo-aselekte getallen.

Ter illustratie worden trekkingen gedaan van $\underline{x}$, die de waarden 3, 5, 6, 8 en 9 kunnen aannemen met kansen $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$. De verdelingsfunctie van $\underline{x}$ staat in figuur 6. Op de verticale as zijn u_0 t/m u_5 uitgezet, op de horizontale as x_1 t/m x_5 .

Figuur 6 De verdelingsfunctie van $\underline{x}$



Een pseudo-aselekt getal representeert weer een trekking uit de homogene verdeling. 10 van deze getallen in een nauwkeurigheid van 3 decimalen leveren als waarden voor $\underline{x}$:

Tabel 7 10 trekkingen uit de verdeling van $\underline{x}$

i	u	x
1	0,215	5
2	0,332	6
3	0,928	9
4	0,607	8
5	0,146	3
6	0,828	9
7	0,527	8
8	0,812	9
9	0,743	8
10	0,421	8

De methode, die hier en voor de alternatieve verdeling gebruikt is om aan de trekkingen van $\underline{x}$ te komen heet: directe inversie. Uit u wordt x berekend, met behulp van de inverse van de verdelingsfunctie F van $\underline{x}$: $x = F^{-1}(u)$.

De verdelingsfunctie $F(x)$ is:

$$F(x) = 0 \quad x < x_1$$

$$F(x) = u_i \quad x_i \leq x < x_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$F(x) = 1 \quad x \geq x_n.$$

Op deze wijze kan uit elke discrete verdeling getrokken worden. Er zijn ook verdelingen, waaruit trekkingen verricht kunnen worden op grond van de interpretatie of speciale eigenschappen van de verdeling.

c. Geometrische verdeling

Gegeven is de alternatieve verdeling met kans op succes p en kans op mislukken $q = 1 - p$. Er wordt een serie onderling onafhankelijke trekkingen uit deze verdeling gedaan, totdat het eerste succes optreedt. Het aantal mislukte experimenten tot dit eerste succes is een stochastische grootte x , die de waarden $0, 1, 2, \dots$ aanneemt met kansen:

$$P\{\underline{x}=x\} = pq^x.$$

Deze kansverdeling heet: geometrische verdeling.

Een trekking x uit $\underline{x}$ kan verricht worden door pseudo-aselekte getallen te genereren, totdat er voor het eerst één $\leq p$ is. Het aantal voorafgaande trekkingen $> p$ geeft de waarde van x .

Ook de methode van directe inversie kan toegepast worden :

$$P\{\underline{x} \leq x\} = F(x) = \sum_{i=1}^x pq^i$$

$$1 - F(x) = \sum_{i=x+1}^{\infty} pq^i = q^{x+1}$$

zodat

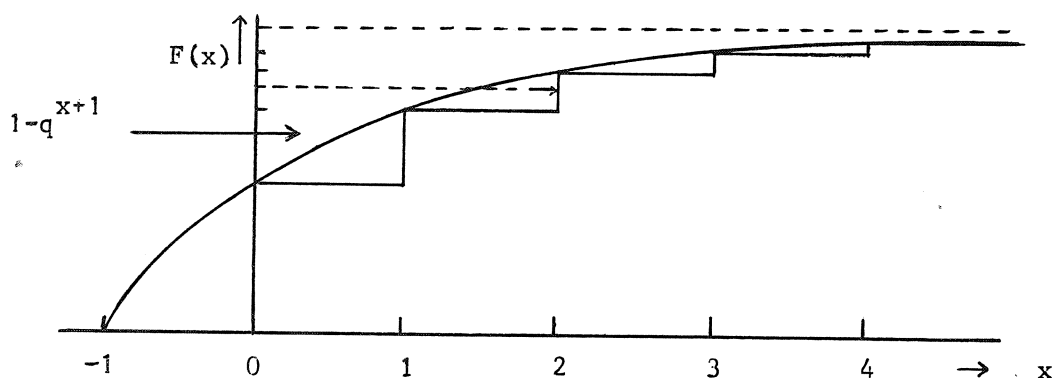
$$F(x) = 1 - q^{x+1} \quad \text{voor } x = 0, 1, 2, \dots$$

Zij u een pseudo-aselekt getal. We stellen nu volgens de methode van de directe inversie

$$u = 1 - q^{x+1},$$

uit welke relatie x gevonden wordt. In de regel zal x niet geheel zijn, en moet nog naar boven afgerond worden (zie figuur 7).

Figuur 7 Verdelingsfunctie van de geometrische verdeling



We schrijven nu x apart en vervangen $1 - u$ door het pseudo-random getal u (is u homogeen verdeeld, dan is $1 - u$ het ook). Dit levert voor een trekking x uit de geometrische verdeling het gehele (naar beneden afgeronde) deel van $\ln u / \ln q$:

$$x = \left\lceil \frac{\ln u}{\ln q} \right\rceil.$$

d. Negatief Binomiale verdeling

Bij de geometrische verdeling werd een alternatief experiment herhaald, totdat het eerste succes optrad. Deze experimenten kunnen ook herhaald worden, tot het n -de succes optreedt. Het aantal mislukte experimenten tot dit n -de succes heeft een negatief binomiale verdeling. Men kan ook zeggen: een negatief binomiaal verdeelde grootheid is de som van n onderling onafhankelijke geometrisch verdeelde grootheden met dezelfde kans op succes p .

Een negatief binomiale grootheid kan gegenereerd worden m.b.v. een rij pseudo-aselekte getallen. Het aantal getallen $> p$, dat optreedt vóór het n -de getal $\leq p$, is negatief binomiaal verdeeld met parameters n en p .

Een andere methode is gebaseerd op de tweede manier om geometrisch verdeelde grootheden te genereren:

$$x = \sum_{i=1}^n \left\lceil \frac{\ln u_i}{\ln q} \right\rceil, \quad q = 1 - p,$$

waarin $u_1, \dots, u_n$ pseudo-aselekte getallen zijn.

e. Binomiale verdeling

Ook de binomiale verdeling hangt nauw samen met de alternatieve verdeling. Het aantal successen bij n onderling onafhankelijke alternatieve experimenten, met kans op succes p , is binomiaal verdeeld. De kansen worden gegeven door:

$$P\{\underline{x}=x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

Een trekking uit deze verdeling kan gedaan worden door n pseudo-aselekte getallen te genereren en het aantal $\leq p$ daaronder te tellen.

Natuurlijk kan ook de methode van direkte inversie gebruikt worden. Een nadeel is dat dan eerst de kansen $p_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ een keer uitgerekend moeten worden voor $x = 0, \dots, n$.

f. Poisson verdeling

De kansverdeling van de Poisson verdeling is:

$$P\{\underline{x}=x\} = e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}.$$

Er bestaat een verband tussen exponentiële en Poissonverdeling:

Zij $\underline{t}$ exponentieel verdeeld met parameter λ . Wij laten nu gebeurtenissen optreden, zodanig dat de tijd tussen opeenvolgende gebeurtenissen steeds verdeeld is volgens $\underline{t}$. Het totaal aantal gebeurtenissen dat in het tijdinterval $\frac{\mu}{\lambda}$ optreedt heeft dan een Poissonverdeling met parameter μ .

Een Poisson verdeelde grootheid kan dus gegenereerd worden m.b.v. exponentieel verdeelde grootheden. De keuze van de parameter λ speelt geen rol: immers, er moet net zolang uit de exponentiële getrokken worden, totdat de som van deze trekkingen het getal $\mu \cdot \frac{1}{\lambda}$ overschrijdt. Dit is μ keer de verwachting van de exponentiële verdeling. We kiezen dus $\lambda = 1$ hetgeen een rekenbewerking scheelt.

De procedure is: als $u_1, u_2, \dots$ pseudo-aselekte getallen zijn, dan is x , zodanig dat

$$-\sum_{i=1}^x \ln u_i \leq \mu < -\sum_{i=1}^{x+1} \ln u_i,$$

Poisson verdeeld met parameter μ .

Het rekenwerk wordt nog aanzienlijk bekort door deze ongelijkheid met -1 te vermenigvuldigen en de e -macht te nemen:

$x = 0, 1, 2, \dots$, voldoende aan

$$\prod_{i=1}^x u_i \geq e^{-\mu} > \prod_{i=1}^{x+1} u_i$$

waarin $u_1, u_2, \dots$ pseudo-aselekte getallen, is Poisson verdeeld.

4.2. Continue verdelingen

Er zijn trekkingen nodig van een stochastische grootte x met continue verdelingsfunctie $F(x)$. Indien mogelijk wordt hierbij gebruik gemaakt van "direkte inversie". Deze berust op het feit dat $F(x)$ homogeen verdeeld is op het interval $(0,1)$. Een trekking van x kan dus verricht worden door eerst een trekking van $F(x)$ te doen, m.b.v. een pseudo-aselekt getal u , en met de inverse van F de bijbehorende waarde van x uit te rekenen:

$$x = F^{-1}(u).$$

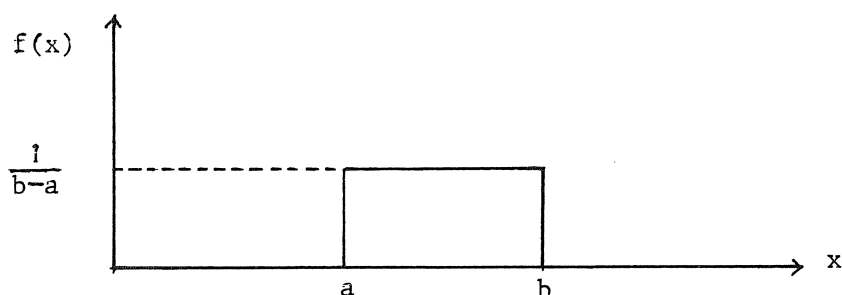
In sommige gevallen bestaat er voor F en F^{-1} geen gemakkelijk hanteerbare formule zoals b.v. bij de normale verdeling. Dan zijn ingewikkelder transformaties van pseudo-aselekte getallen nodig om tot trekkingen uit de verdeling te komen.

In andere gevallen kan ook weer gebruik gemaakt worden van speciale eigenschappen van de verdelingen zoals b.v. bij de chi-kwadraat verdeling en gamma verdeling.

a. Uniforme verdeling

x is uniform verdeeld op het interval (a,b) .

Figuur 8 Uniforme verdelingsdichtheid



De verdelingsfunctie $F(x)$ is:

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}.$$

We stellen het pseudo-aselekte getal u gelijk aan $F(x)$, en lossen x op;

$$u = F(x) = \frac{x-a}{b-a},$$

$$x = (b-a) u + a.$$

Dit levert dus een trekking uit de uniforme verdeling door direkte inversie.

b. Exponentiële verdeling

De verdelingsfunctie van deze verdeling met verwachting $\frac{1}{\lambda} > 0$ is:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Met behulp van direkte inversie volgt dan:

$$u = 1 - e^{-\lambda x},$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln (1-u).$$

Wanneer u homogeen verdeeld is op het interval $(0,1)$, dan is $1-u$ dat ook, zodat we voor x schrijven:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln u,$$

waarin u een pseudo-aselekt getal en $\frac{1}{\lambda}$ de verwachting van de verdeling is.

c. Gamma verdeling, Erlang verdeling, chi-kwadraat verdeling

De verdelingsfunctie van de gamma verdeling met parameters $\lambda > 0$ en $k > 0$ is:

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{(k-1)} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}.$$

Voor de verdelingsfunctie bestaat geen expliciete uitdrukking, zodat de methode van directe inversie toegepast kan worden.

Voor k geheel (zgn. Erlang verdeling) kan echter gebruik gemaakt worden van de volgende eigenschap: de som van k onderling onafhankelijke exponentieel verdeelde grootheden met allen dezelfde verwachting $\frac{1}{\lambda}$ heeft een gamma verdeling met parameters λ en k .

Een gamma verdeelde grootheid met parameters λ en k (geheel) kan dus gegenereerd worden door:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \ln u_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\prod_{i=1}^k u_i \right),$$

waarin $u_1, \dots, u_k$ pseudo-aselekte getallen.

Tussen chi-kwadraat en gamma verdeling bestaat het volgende verband: de chi-kwadraat verdeling met $2k$ vrijheidsgraden is een gamma verdeling met parameters $\lambda = \frac{1}{2}$ en k . Chi-kwadraat verdeelde grootheden met $2k$ (k geheel) vrijheidsgraden kunnen gegenereerd worden door:

$$x = -2 \sum_{i=1}^k \ln u_i = -2 \ln \left(\prod_{i=1}^k u_i \right).$$

De chi-kwadraat verdeling hangt ook nauw samen met de normale verdeling. Zie hieronder.

d. Normale verdeling, chi-kwadraat verdeling, log normale verdeling

Het is voldoende om standaard normaal verdeelde grootheden $x(0,1)$ te genereren, omdat daaruit normaal verdeelde grootheden met verwachting μ en spreiding σ berekend kunnen worden met:

$$x(\mu, \sigma) = \sigma x(0,1) + \mu.$$

De verdelings dichtheid van de standaard normale verdeling is:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

maar voor de verdelingsfunctie bestaat geen expliciete formule, zodat

de methode van direkte inversie niet toegepast kan worden.

Men kan bewijzen, wanneer u_1 en u_2 onderling onafhankelijk en homogeen $(0,1)$ verdeeld zijn, dat x_1 en x_2 :

$$x_1 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \cos 2\pi u_2$$

$$x_2 = \sqrt{-2 \ln u_1} \cdot \sin 2\pi u_2$$

onderling onafhankelijk en standaard normaal verdeeld zijn.

Met bovenstaande transformatie kunnen dus uit twee pseudo-aselekte getallen u_1 en u_2 twee standaard normale grootheden x_1 en x_2 berekend worden.

Een andere veel gebruikte methode is gebaseerd op de centrale limietstelling. Deze luidt: als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ onderling onafhankelijk zijn en gelijk verdeeld met verwachting μ en spreiding σ , dan geldt:

$$\frac{\sum_{i=1}^N \underline{x}_i - N\mu}{\sqrt{N} \cdot \sigma}$$

heeft voor $N \rightarrow \infty$ als limiet een standaard normale verdeling.

Het ligt voor de hand uit te gaan van de homogene $(0,1)$ verdeling.

Daarvoor geldt: $\mu = \frac{1}{2}$, $\sigma = 1/\sqrt{12}$. Voor $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ kunnen nu pseudo-aselekte getallen $u_1, u_2, \dots$ gebruikt worden, zodat

$$x = \frac{\sum_{i=1}^N u_i - N/2}{\sqrt{\frac{N}{12}}}$$

bij benadering standaard normaal verdeeld is.

Uit oogpunt van nauwkeurigheid moet N groot gekozen worden, maar efficiency overwegingen pleiten voor zo klein mogelijke N . De kleinste waarde van N die aangeraden wordt is $N = 10$. In de praktijk wordt

meestal $N = 12$ gebruikt, omdat daardoor nog enkele berekeningen uitvallen. Dit levert:

$$x = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6.$$

Bovenstaande formule levert redelijke resultaten met de grootste afwijkingen in de staarten.

Ten slotte zijn er natuurlijk nog tabellen, die voor hand berekening zeer geschikt zijn. Zoals b.v. de tabel van Wold die 25.000 trekkingen uit de standaard normale verdeling bevat.

Van de verdelingen die nauw met de normale verdeling samenhangen noemen we nog de chi-kwadraat en de log normale.

De chi-kwadraat hangt behalve met de exponentiële verdeling (zie 4.2c) ook nog als volgt met de normale verdeling samen.

De som van k kwadraten van onderling onafhankelijke standaard normaal verdeelde grootheden heeft een χ^2 -verdeling met k vrijheidsgraden.

Een χ^2 -verdeelde grootheid kan dus gegenereerd worden, door met één van de hierboven genoemde methodes k standaard normale grootheden te genereren, en deze vervolgens te kwadrateren en op te tellen.

Wanneer k even is, is methode 4.2c echter sneller of exacter. Voor on-even k kunnen beide methodes gecombineerd worden: $k = 2r + 1$

$$x = -2 \ln \left(\prod_{i=1}^r u_i \right) + \sum_{i=r+1}^{r+12} u_i - 6$$

of

$$x = -2 \ln \left(\prod_{i=1}^r u_i \right) - 2 \ln u_{r+1} \cdot (\cos 2\pi u_{r+2})^2.$$

De eerste regel is over het algemeen sneller; dit hangt natuurlijk af van de snelheid waarmee pseudo-aselekte getallen getrokken worden, en van de snelheid van de procedures $\ln$ en $\cos$.

Wanneer het aantal vrijheidsgraden groot (>30) is, kan de normale be-

nadering gebruikt worden (dit is een gevolg van de centrale limietstelling).

De verwachting en spreiding van χ^2 zijn respectievelijk k en $\sqrt{2k}$, zodat b.v.

$$x = \left(\sum_{i=1}^{12} u_i - 6 \right) \cdot \sqrt{2k} + k$$

voor grote k een benadering van χ_k^2 is.

Het verband tussen log normale en normale verdeling is:

zij y normaal verdeeld met verwachting μ en spreiding σ , dan is x :

$$x = e^{\frac{y}{\sigma}}$$

log normaal verdeeld.

Gebruikmakend van één van de methodes om een standaard normaal verdeelde grootheid z te genereren, kan daaruit door de transformatie

$$x = \exp(\sigma z + \mu)$$

een log normaal verdeelde grootheid verkregen worden.

5. Enige algemene aspecten van simulatie

Nadat de spelregels van het simulatiemodel zijn vastgelegd moeten nog beslissingen worden genomen over de volgende 3 punten.

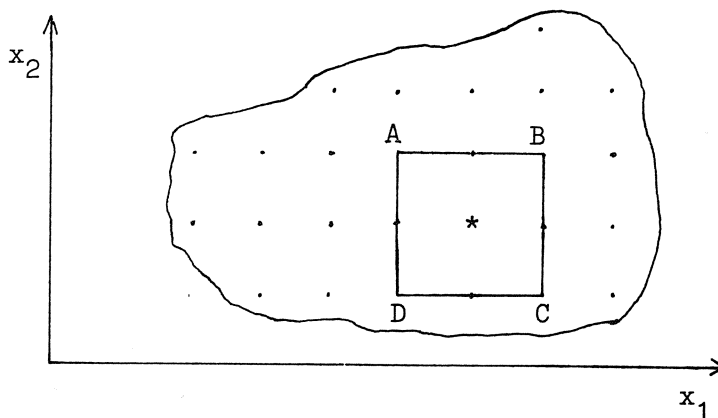
- (1) welke toegelaten oplossingen worden doorgerekend
- (2) de begintoestand
- (3) het aantal series.

Deze onderwerpen komen achtereenvolgens ter sprake.

5.1 Welke toegelaten oplossingen moeten worden doorgerekend

Dit probleem is bij simulatie vooral aan de orde als het aantal toegelaten oplossingen onbegrensd groot is. Er zijn dan twee mogelijkheden: a) de toegelaten oplossingen zijn afzonderlijke punten, zoals $m = 1, 2, \dots$ in voorbeeld 2.2. of b) alle reële waarden binnen of op de rand van het toegelaten gebied kunnen worden aangenomen zoals in het te bespreken praktijkprobleem. In het laatste geval zal men tot discretisering van het toegelaten gebied moeten overgaan. Men legt dan een "rooster" aan in het toegelaten gebied en berekent met behulp van de simulatie alleen in de roosterpunten de waarde van de criteriumfunctie. In figuur 9 zijn het toegelaten gebied en het rooster, voor het geval dat er twee beslissingsvariabelen x_1 en x_2 zijn, getekend. Stel dat het minimum wordt bereikt in het punt dat met * is gemerkt. Indien men het gewenst acht het minimum nauwkeuriger te bepalen dan kan men bijvoorbeeld in de rechthoek ABCD een verfijnder rooster aanbrengen en het onderzoek op deze roosterpunten voortzetten. Vooral bij Monte Carlo methoden is het gezien de statistische fluctuaties aan te bevelen van regressie gebruik te maken. Men past dan een tweedegraads polynoom in de beslissingsvariabelen met behulp van regressie aan en bepaalt vervolgens waar deze polynoom zijn minimum bereikt. We merken op dat ook bij deterministische problemen met een continue criteriumfunctie het rekentechnisch niet mogelijk is de plaats van het minimum exact vast te stellen, enkele eenvoudige gevallen uitgezonderd. Men kan dan niet verder komen dan de uitspraak: "Het minimum (maximum) ligt met zekerheid binnen of op de rand van dit kleine gebied" Wel kan men dit gebied steeds kleiner maken door langer te rekenen.

Figuur 9 Toegelaten gebied en rooster



Een andere complicatie is dat men wel een plaatselijk minimum metbehulp van bovenstaande werkwijze bij benadering heeft vastgesteld, maar niet over de garantie beschikt dat dit het absolute minimum is over het gehele toegelaten gebied.

Men is bij een minimum (maximum)-probleem zeker dat een gevonden minimum (maximum) ook het absolute minimum (maximum) is als de criteriumfunctie convex (concaaf) is.

In voorbeeld 2.2 is de criteriumfunctie convex. Het gevolg is dat de waarden van $m > 5$ niet behoeven te worden onderzocht daar $m = 3$ een minimum oplevert. Overigens kunnen we gezien het statistische karakter niet met zekerheid vaststellen dat $m = 3$ de voorkeur verdient boven $m = 2$ en $m = 4$. (Hoe betrouwbaar de uitspraak is dat het minimum bij $m = 3$ wordt bereikt, wordt nagegaan in paragraaf 5.3)

In de praktijk is het vaststellen of de criteriumfunctie convex of concaaf is een lastig probleem. Hopelijk kan men, op grond van de kennis die men van het systeem heeft, uitmaken dat er slechts één minimum of maximum kan zijn.

5.2 De keuze van de begintoestand

De keuze van de begintoestand levert alleen moeilijkheden op als de criteriumfunctie betrekking heeft op de stationaire toestand. In voorbeeld 2.2 zal dit het geval zijn als de werkelijkheid beter benaderd wordt door de

begintoestand dagelijks gelijk te stellen aan de eindtoestand van de vorige dag. Zoals reeds opgemerkt in paragraaf 2 wordt de stationaire toestand theoretisch pas na een oneindig lange tijdsperiode bereikt indien aan twee voorwaarden is voldaan. Gesteld dat aan deze twee voorwaarden is voldaan dan dient men zich in de praktijk af te vragen hoe lang de inlooperperiode genomen moet worden opdat de stationaire toestand met voldoende nauwkeurigheid is bereikt. Daar de resultaten van de inlooperperiode niet mogen worden meegeteld in het uiteindelijke resultaat is het zaak om te streven naar een zo kort mogelijke inlooperperiode. Dit laatste kan worden bereikt door als begintoestand een toestand te kiezen die in de stationaire toestand een hoge kans van optreden heeft. Meestal is $n = 0$ in dit verband juist een slechte keuze. Een tweede vraag is hoelang deze inlooperperiode moet worden genomen. Het meest praktische is om een lange serie te simuleren en deze in stukken te hakken. Op grond van een vergelijking van de resultaten van deze deelseries kan achteraf besloten worden of behalve de eerste deelserie nog een of meer van de volgende deelseries moeten afvallen.

In voorbeeld 2.2 is nagegaan met behulp van de X8 van het Mathematisch Centrum hoe snel de stationaire toestand wordt bereikt door bij de 10e, 20e, 30e, 40e en 50e aankomst te tellen hoeveel monteurs er in het systeem aanwezig waren. De begintoestand was $n = 0$, terwijl het aantal bedienden $m = 2$ bedroeg. De resultaten van $N = 100$ proefseries zijn ingedeeld in de klassen $n = 0, 1, \dots, 6$ en $n \geq 7$, aan te geven door $k = 1, \dots, 8$ respectievelijk en zijn te vinden in tabel 8.

Tabel 8 De resultaten van 100 proefseries

klasse (k)	aankomst						100q _k
	1e	10e	20e	30e	40e	50e	
1	100	39	33	27	31	23	25
2	0	35	26	31	33	26	30
3	0	15	18	19	10	18	18
4	0	8	11	11	7	15	10,8
5	0	1	7	7	9	9	6,48
6	0	1	1	3	5	3	3,89
7	0	0	3	0	2	2	2,33
8	0	1	1	2	3	4	3,50
totaal	100	100	100	100	100	100	100

Vervolgens is met de χ^2 -toets voor aanpassing nagegaan hoe deze empirische verdelingen overeenstemden met de langs theoretische weg berekende stationaire kansverdeling p_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. De kansen q_k op een der klassen $k = 1, \dots, r$ met $r = 8$ worden gegeven door $q_k = p_{k-1}$ voor $k = 1, \dots, 7$ en $q_8 = \sum_{n=7} p_n$. Laat f_k het aantal waarnemingen in klasse k voorstellen dan heeft de grootheid $\underline{t}$, gegeven door

$$\underline{t} = \sum_{k=1}^r \frac{(f_k - Nq_k)^2}{Nq_k} \quad (5.1)$$

bij benadering een χ^2 -verdeling met $r-1$ vrijheidsgraden voor grote N . De nulhypothese dat de de waarnemingen aan de gegeven stationaire verdeling voldoen wordt rechts-eenzijdig getoetst. De uitkomsten van $\underline{t}$ zijn gegeven in tabel 9.

Tabel 9 De uitkomsten van t

Aankomst	t
1	300
10	20,8
20	7,26
30	3,47
40	8,05
50	3,63

Namen we als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0,05$ dan is de rechter kritieke waarde 14,07.

Bij een $\alpha = 0,05$ wordt de nulhypothese alleen verworpen bij de 1^e en de 10^e aankomst. Als inlooperperiode hebben we in dit geval voldoende aan de eerste 20 aankomsten.

5.3 Het aantal series

In voorbeeld 2.2 is het aantal werkdagen dat moet worden gesimuleerd nog niet vastgesteld. Dit aantal hangt nauw samen met de gewenste nauwkeurigheid. Zoals reeds opgemerkt is bij een Monte-Carlo simulatie een exakt antwoord nooit te bereiken. Het resultaat van een dergelijk experiment is altijd afhankelijk van de gebruikte aselekte getallen. Wel mogen we op grond van de statistische wetten der grote aantallen verwachten dat iedere gewenste nauwkeurigheid kan worden bereikt als het aantal experimenten maar groot genoeg wordt gekozen.

Stel dat men geïnteresseerd is in de verwachting van een stochastische grootheid $\underline{w}$ en dat men deze verwachting $E\underline{w}$ wil schatten met behulp van een Monte-Carlo experiment. Stel dat $\underline{w}_i$, $i = 1, \dots, N$ de uitkomsten zijn van

deze N series en dat ze ongecorreleerd zijn. Een zuivere schatter voor $E\bar{w}$ is het steekproefgemiddelde $\bar{w}$ gegeven door

$$\bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \quad (5.2)$$

De schatter $\bar{w}$ heeft een variantie

$$\text{Var } \bar{w} = \frac{1}{N} \text{Var } w \quad (5.3)$$

Aangezien $\text{Var } w$ niet van N afhangt kunnen we op grond van (5.3) stellen dat de standaarddeviatie van $\bar{w}$ ($= \sqrt{\text{Var } \bar{w}}$) een factor f kleiner wordt als het aantal waarnemingen $f^2 \times$ zo groot gekozen wordt. Deze regel die bij ongecorreleerde waarnemingen exact opgaat kan als vuistregel ook in andere gevallen gebruikt worden.

Gebruikten we tot nu toe de standaarddeviatie van $\bar{w}$ als maat voor de onnauwkeurigheid, we kunnen dat meestal ook met een betrouwbaarheidsinterval doen. Volgens de centrale limietstelling is de grootheid

$$t = \frac{\bar{w} - E\bar{w}}{\sqrt{\text{Var } \bar{w}}} = \frac{\bar{w} - E\bar{w}}{\sqrt{\text{Var } w}} \cdot \sqrt{N} \quad (5.4)$$

bij benadering standaard normaal verdeeld en kan een betrouwbaarheidsinterval voor $E\bar{w}$ gebaseerd op deze verdeling op de gebruikelijke wijze worden geconstrueerd. Bij een onbetrouwbaarheid van bijvoorbeeld $\alpha = 0,05$ wordt dit betrouwbaarheidsinterval gegeven door

$$\bar{w} - 1,96 \sqrt{\frac{\text{Var } w}{N}} \leq E\bar{w} \leq \bar{w} + 1,96 \sqrt{\frac{\text{Var } w}{N}} \quad (5.5)$$

Meestal is echter $\text{Var } w$ niet bekend. In dat geval bepaalt men uit de waarnemingen de grootheid

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (w_i - \bar{w})^2}{N - 1} \quad (5.6)$$

welke een zuivere schatter is van $\text{Var } w$. Deze grootheid wordt vervolgens

voor $\text{Var } \underline{w}$ in (5.5) gesubstitueerd.

Bij besliskundige problemen moet uit de resultaten van de simulatie voor verschillende toegelaten oplossingen een optimum worden bepaald. Men is in eerste instantie meer in de verschillen dan in de absolute waarden van de uitkomsten geïnteresseerd. Alle uitgekozen toegelaten oplossingen worden dan met dezelfde serie aselekte getallen doorgerekend en dit experiment wordt totaal N x uitgevoerd, waarbij dus slechts van N verschillende series aselekte getallen wordt gebruik gemaakt. Veronderstel dat we twee alternatieven willen vergelijken en dat deze de uitkomsten $\underline{w}_i$ en $\underline{w}'_i$ $i=1, \dots, N$ leveren. Laat $\bar{\underline{w}}$ en $\bar{\underline{w}'}$ de steekproefgemiddelden zijn. Stel verder dat $\underline{v}_i = \underline{w}_i - \underline{w}'_i$ dan geldt voor het gemiddelde verschil

$$\bar{\underline{v}} = \overline{\underline{w}_i - \underline{w}'_i} = \bar{\underline{w}} - \bar{\underline{w}'} \quad (5.7)$$

en voor de variantie van het gemiddelde verschil $\bar{\underline{v}}$

$$\text{Var } \bar{\underline{v}} = \text{Var } \bar{\underline{w}} + \text{Var } \bar{\underline{w}'} - 2\text{Cov}(\bar{\underline{w}}, \bar{\underline{w}'}). \quad (5.8)$$

Indien nu $\text{Cov}(\bar{\underline{w}}, \bar{\underline{w}'}) > 0$ en dus beide uitkomstenreeksen positief gecorreleerd zijn, dan is $\text{Var } \bar{\underline{v}}$ kleiner dan bij de ongecorreleerde waarnemingen. Bij het schatten van verschillen is de nauwkeurigheid van deze verschillen des te groter naarmate de beide reeksen van uitkomsten sterker positief gecorreleerd zijn. Een zo sterk mogelijk positieve correlatie wordt nu bereikt door dezelfde aselekte getallen te gebruiken.

Op grond van deze verschillen $\underline{v}_i$ wordt vervolgens de ligging van het optimum statistisch getoetst. Dit toetsen kan slechts per tweetal alternatieven geschieden. Als nulhypothese wordt genomen $E\underline{v} \geq 0$. Daar $\bar{\underline{v}}$ bij benadering normaal verdeeld is gebruiken we de $\underline{t}$ uit formule (5.4), met de $\underline{s}^2$ uit formule (5.6) hierin gesubstitueerd voor de onbekende $\text{Var } \underline{v}$ als toetsingsgrootheid. De werkwijze wordt toegelicht aan de resultaten van voorbeeld 2.2.

De criterium functie in voorbeeld 2.2 wordt weergegeven door $y(m)$. Voor alle $N = 15$ dagen worden de verschillen $y(3) - y(2)$ en $y(4) - y(3)$ berekend en hieruit de grootheden $\bar{\underline{v}}$, $\sqrt{\underline{s}^2}$ en $\underline{t}$. De resultaten zijn weergegeven

in tabel 10.

Tabel 10 Het toetsen van de optimale oplossing

	$\bar{v}$	$\sqrt{s^2}$	t
y(3) - y(2) 1 ^e serie	- 8,28	11,88	- 2,70
y(3) - y(2) 2 ^e serie	- 4,21	10,31	- 1,58
y(4) - y(3) 1 ^e serie	25,68	1,16	85,80
y(4) - y(3) 2 ^e serie	25,50	1,86	52,95

We toetsen de samengestelde nulhypothese $E \underline{v} \geq 0$ waarin $\underline{v} = y(3) - y(2)$.

Daar $\bar{v}$ bij benadering een normale verdeling heeft, heeft de toetsingsgroot-
t gegeven door

$$\underline{t} = \frac{\bar{v} - E\underline{v}}{\sqrt{s^2}} \sqrt{N}$$

bij benadering een Student-verdeling met N-1 vrijheidsgraden. Bij een Student-verdeling met N-1 = 14 vrijheidsgraden geldt

$$P\{\underline{t} < - 1,76 \mid H_0\} \leq 0,05$$

zodat H_0 volgens tabel 10 bij de 1^e serie wel, maar bij de 2^e serie niet wordt verworpen. Worden beide series samengesteld tot één serie van 30 dan wordt H_0 wel verworpen.

Op grond hiervan concluderen we $E \underline{y}(3) - E \underline{y}(2) < 0$ bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0,05. Op dezelfde wijze volgt $E \underline{y}(3) - E \underline{y}(4) < 0$ bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van zelfs 0,005.

De zojuist beschreven methode is in feite een van de methoden die worden gebruikt om de variantie in de uitkomsten te verminderen. Andere variantiereductiemethoden worden beschreven in paragraaf 14 van HILLIER en LIEBERMAN (blz. 453-462) en in HAMMERSLEY and HANDSCOMB, Monte-Carlo Methods, Methuen, 1964. In LOMBAERS, Enige statistische aspecten van simulatie, Statistica Neerlandica 22 (1968), blz. 243-255 wordt de toepassing van twee variantiereductiemethoden op een wachttijdsimulatie behandeld.

Om de taak van het programmeren van een simulatiemodel te vergemakkelijken kan nog gebruik gemaakt worden van speciaal voor simulatieproblemen geschreven programmeertalen. Voor informatie over deze simulatietalen wordt verwezen naar de publikaties hierover van de stichting Het Nederlandse Studiecentrum voor Informatica.

6. Vraagstukken.

1. Een drietal busdiensten doen een bepaalde halte aan. De tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende aankomsten van buslijnen 1,2 en 3 zijn negatief exponentieel verdeeld met een verwachting 15, 20 en 30 minuten respectievelijk. Een busreiziger komt bij de halte aan.

Gevraagd wordt

- a de verwachte wachttijd tot de aankomst van de eerstvolgende bus,
- b de kans dat de eerstvolgende bus van lijn 2 is,
- c de kans dat de eerstvolgende bus van lijn 1 of lijn 2 is.

2. Gegeven zijn de volgende waarnemingen:

15, 33, 45, 28, 36, 13, 26, 22, 32, 30, 33, 45, 18, 23, 40, 38, 27, 25, 18, 22.

Doe met de uit 2 aselekte cijfers bestaande getallen uit vraagstuk 6 10 trekkingen uit deze waarnemingen.

3. Bepaal met de uit 2 aselekte cijfers bestaande getallen uit vraagstuk 6 10 trekkingen uit de volgende kansverdeling

x	0	2	4	5	7
$P\{\underline{x} = x\}$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3

4. Gegeven zijn de volgende drie trekkingen uit de standaard-normale verdeling: $-0,581$; $8,243$ en $1,871$. Bepaal hiermee drie trekkingen uit de normale verdeling met $\mu = 10$ en $\sigma^2 = 16$.
5. Gegeven zijn de volgende drie trekkingen uit de negatief exponentiële verdeling met verwachting 1: $0,686$, $1,341$ en $0,483$. Bepaal hiermee drie trekkingen uit de negatief exponentiële verdeling met parameter $\lambda = 0,5$.
6. Iedere week gaat een servicemonteur van de "Tweede Nederlandse Fabriek van Rekenautomaten N.V." (TNFR) met een servicewagen vijf steden langs. Op maandag wordt Groningen (1) bezocht, dinsdag vertoeft de monteur in Amsterdam (2), woensdag en donderdag behartigt hij achtereenvolgens de belangen van de TNFR in Rotterdam (3) en Antwerpen (4) en op vrijdag wordt tenslotte Aken (5) aangedaan. De fabriek zelf is gevestigd in Tilburg. De monteur kan in zijn wagen hoogstens vijf reserveonderdelen van het type U507A meenemen. Indien hij op het einde van een dag vindt dat zijn voorraad ontoereikend is, dan kan hij de avond benutten om naar Tilburg te gaan voor het aanvullen van zijn voorraad. Een rit vanuit de stad i naar de volgende stad *via Tilburg* brengt een bedrag a_i aan extra kosten met zich mee, ongeacht de omvang van de aanvulling die dan plaats vindt (zie tabel). De kans op een behoefte aan r onderdelen in de stad i is uit vele waarnemingen geschat en bedraagt $p_r^{(i)}$ (zie tabel). De behoefte aan reserveonderdelen U507A is in geen enkele stad groter dan twee stuks.

Blijkt in een stad dat de monteur één of meer onderdelen te kort komt dan wordt de volgende dag vanuit Tilburg een extra monteur met de ontbrekende onderdelen gezonden; de kosten hiervan bedragen f 200,- ongeacht het aantal af te leggen kilometers en het aantal ontbrekende

onderdelen. De servicemonteur wacht echter niet op zijn collega en vervolgt zijn weg naar de volgende stad die op het programma staat, al of niet via Tilburg. De extra monteur verricht geheel zelfstandig de noodzakelijke reparaties.

stad i	kansverdeling $p_r^{(i)}$			extra kosten a_i
	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	
1	1/2	1/3	1/6	60
2	1/6	1/2	1/3	30
3	1/6	2/3	1/6	50
4	1/3	1/2	1/6	25
5	1/6	5/6	0	100

Gevraagd wordt de volgende twee beslissingsvoorschriften door simulatie te vergelijken.

Voorschrift 1: Dan en slechts dan via Tilburg te reizen als alle meegenomen onderdelen U507A zijn verbruikt.

Voorschrift 2: Vanuit de plaatsen Amsterdam (2) en Antwerpen (4) via Tilburg te reizen als de voorraad één of minder is. Vanuit de andere plaatsen dan en slechts dan via Tilburg reizen als alle meegenomen onderdelen U507A zijn verbruikt.

Vergelijk deze 2 voorschriften door met beide een simulatie over 8 weken uit te voeren met de volgende getallen bestaande uit 2 aselekte cijfers

09	65	69	66	57	64	84	24	92	22
49	50	61	01	45	48	45	52	35	05
90	43	00	41	80	24	71	25	57	99
60	85	77	34	79	33	58	11	73	60

58

(gebruik alleen de getallen 00 t/m 95; waarom?)

7. De beheerder van een waterreservoir staat op het punt per 1 januari een contract af te sluiten met een electriciteitscentrale voor de levering van koelwater voor de komende 2 jaar. Het contract bepaalt dat in ieder kwartaal steeds dezelfde hoeveelheid van x eenheden koelwater moet worden afgeleverd. De levering vindt plaats aan het einde van ieder kwartaal. Indien zich dan niet voldoende water in het reservoir bevindt, wordt de aanwezige hoeveelheid gratis geleverd, terwijl voor iedere ontbrekende eenheid een boete van 10 moet worden betaald. Indien de overeengekomen hoeveelheid x wel kan worden geleverd dan brengt dit bij $x = 2$ een bedrag van 40 en bij $x = 3$ een bedrag van 80 op. De instroming door regenval per kwartaal volgt een kansverdeling die voor ieder van de 4 kwartalen van het kalenderjaar verschillend is. Deze 4 kansverdelingen zijn gegeven in de volgende tabel,

kwartaal ↓ \ i →	0	1	2	3	4
jan. t/m maart	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
april t/m juni	0,15	0,8	0,05		
juli t/m sept.	0,2	0,4	0,3	0,1	
okt. t/m dec.	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

waarin i het aantal ingestroomde eenheden voorstelt. Het reservoir kan vlak voor de levering niet meer dan 5 eenheden bevatten. Alvorens het contract wordt afgesloten, mag de beheerder van het reservoir vaststellen of hij steeds $x = 2$ of $x = 3$ eenheden koelwater zal leveren.

Gevraagd: Vergelijk een contract met $x = 2$ en een contract met $x = 3$ op grond van de verwachte netto opbrengst (= opbrengst - boetekosten) over 2 jaar door middel van simulatie. Doe 4 experimenten met beide contracten bij een beginhoeveelheid van 1 eenheid op 1 januari van elk 1^e jaar. Maak hierbij gebruik van de volgende getallen bestaande uit 2 aselekte cijfers

09	24	07	84	38	48	41	73
57	92	07	57	65	04	48	00
38	91	50	26	96	55	96	46
87	56	58	94	08	41	12	57

Doe op grond van de uitkomsten een statistische uitspraak over de vraag welke van de twee contracten de voorkeur verdient.

8. De Eerste Zeedorpse Aardolie Mij. (EZAM) gaat een grote serie proefboringen verrichten. De daarbij te gebruiken boorkop heeft een beperkte levensduur. De prijs van een nieuwe boorkop bedraagt f 20.000,-. Wanneer tijdens een boring een boorkop breekt moet deze worden vervangen door een nieuwe en dit brengt extra kosten met zich mee ten bedrage van f 60.000,-. Tijdens een boring kan ten hoogste éénmaal een boorkop breken; de vervangende kop blijft heel gedurende het resterende gedeelte van de boring. De leeftijd van een boorkop is gelijk aan het aantal, geheel of gedeeltelijk, overleefde proefboringen. Aan het einde van een proefboring waarin een kapotte boorkop is vervangen heeft de vervangende boor derhalve de leeftijd één. In de onderstaande tabel wordt de kans op een breuk van een boorkop gegeven bij verschillende leeftijden.

leeftijd	kans op breuk bij de eerstvolgende boring
0	0,0625
1	0,125
2	0,5
3	1

Bij de eerste proefboring begint men met een nieuwe boorkop. Bij alle volgende boringen vraagt men zich af of het soms verstandig is om ook dan met een nieuwe boorkop te beginnen.

Gevraagd wordt de volgende twee vervangingsvoorschriften te vergelijken

met behulp van simulatie

1. iedere boorkop met leeftijd 2 vervangen door een nieuwe,
2. iedere boorkop met leeftijd 3 vervangen door een nieuwe.

Doe met beide voorschriften 20 proefboringen met de volgende 20 getallen bestaande uit 2 aselekte cijfers.

09	65	69	66	57	64	84	24	92	22
49	50	61	01	45	48	45	52	35	05

9. Voor een bepaald artikel is de verdelingsfunctie van de vraag per dag als volgt

v	0	1	2	3	4	5	6	7
$P\{\underline{v} \leq v\}$	0,25	0,5	0,625	0,75	0,8125	0,875	0,9375	1

De winkelier die het artikel verkoopt kan elke dag bijbestellen, behalve als er reeds een bestelling onderweg is.

Het bijbestellen geschiedt 's avonds na sluitingstijd en de bestelling wordt 's ochtends voor openingstijd bezorgd.

Het aantal gehele dagen tussen bestelling en aflevering (de levertijd l) is stochastisch met de volgende kansverdeling

levertijd <u>l</u> in dagen	$P\{\underline{l} = l\}$
1	0,25
2	0,5
3	0,25

Aan het in voorraad houden van het artikel zijn kosten verbonden, en wel ϵ 2,50 per stuk per dag over de voorraad aan het einde van de dag. Voorts heeft de winkelier te maken met bestelkosten à ϵ 5,- per be-

stelling. De kosten van neen-verkoop bedragen f 10,- per stuk. De winkelier wenst zijn kosten te minimaliseren.

Gevraagd wordt met behulp van simulatie de volgende twee inkoopvoor-schriften te vergelijken.

1. aanvullen tot 9 als de voorraad kleiner is dan 6,
2. aanvullen tot 7 als de voorraad kleiner is dan 4.

Voer de simulatie uit over 15 dagen en maak gebruik van de getallen uit vraagstuk 6. Begin met een voorraad van 4 stuks.

10. Bij de produktie van suiker kan in een bepaald stadium van het produktieproces formaline worden toegediend indien het melkzuurgehalte daartoe aanleiding geeft. De beslissing "formaline toedienen" geven we aan met $x = 1$ en de beslissing "geen formaline toedienen" geven we aan met $x = 0$. Het melkzuurgehalte s wordt iedere dag door een analyse gemeten en kan $s = 0, 1$ of 2 bedragen. Indien $s = 2$ dan is alleen $x = 1$ mogelijk. Indien $s = 0$ dan is alleen $x = 0$ mogelijk. Indien $s = 1$ dan is er keuze tussen de beslissingen $x = 0$ en $x = 1$. Hieruit volgt dat het getallenpaar (s, x) slechts $(2, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ of $(0, 0)$ kan zijn. Voor ieder van deze vier mogelijkheden is de kansverdeling van het melkzuurgehalte s' op het volgende meettijdstip gegeven in de volgende tabel:

$(s, x) \downarrow s' \rightarrow$	0	1	2
$(2, 1)$	.53	.31	.16
$(1, 1)$	.62	.28	.10
$(1, 0)$	.12	.24	.64
$(0, 0)$	.33	.41	.26

Het toedienen van formaline kost 400. Afhankelijk van het gemeten melkzuurgehalte s bedragen de kosten aan brandstof en opbrengstderving ten gevolge van melkzuur $h(s)$, waarbij $h(s)$ gegeven wordt in de volgende tabel:

s	0	1	2
$h(s)$	300	200	800

Gevraagd: Vergelijk de volgende 2 beslissingsvoorschriften door middel van simulatie

1. altijd formale toedienen als het melkzuurgehalte $s = 1$ bedraagt
 2. nooit formale toedienen als het melkzuurgehalte $s = 1$ bedraagt.
- Verricht hiertoe met beide voorschriften 5 series over 9 meettijdstippen met de volgende 40 getallen bestaande uit 2 aselekte cijfers:

18	76	35	94	73	34	06	54
04	90	06	38	75	59	19	17
27	27	60	70	77	93	18	46
86	01	07	90	23	56	61	17
72	59	93	48	38	93	81	21

Begin iedere serie met een melkzuurgehalte van $s = 1$ op het eerste meettijdstip. Reken ook de eventuele kosten van het formale toedienen op het 9-de meettijdstip mee.

Doe op grond van de uitkomsten een statistische uitspraak over de vraag welke van de 2 voorschriften de voorkeur verdient.